Глава 9

Стохастическая динамика внутренних переменных

В первой главе было отмечено, что внутренние переменные имеют пульсирующую составляющую, которой можно пренебречь при рассмотрении многих явлений, что мы и делали в предыдущих главах. Однако иногда встречаются случаи, когда флуктуации составляют сущность явления и не могут быть пренебрежены. Начало стохастической динамики относят обычно к изучению движения взвешенных в жидкости малых частиц, получившего название броуновского (Эйнштейн, 1905; Langevin, 1908), хотя впоследствии выяснилось, что первая формализация случайного блуждания была выполнена на примере пульсации рыночной цены (Bachelier, 1900). Подобно тому, как блуждание броуновской частицы сводится к хаотическому молекулярному движению, случайные пульсации цены сводятся к случайностям поведения экономических агентов, однако теория динамики цены не приобрела ещё такой ясности и завершенности, которую имеет теория броуновской частицы. В дальнейшем теория стохастической динамики была применена к многочисленным ситуациям, когда необходимо учитывать существенные пульсации некоторой переменной макроскопической системы.

9.1 Динамика броуновской частицы

Пульсирующее движение, совершаемое малыми частицами (частицы пыли, коллоидные частицы с радиусом приблизительно 10^{-4} cm), взвешенные в жидкости или в газе и наблюдаемые при помощи микроскопа, было

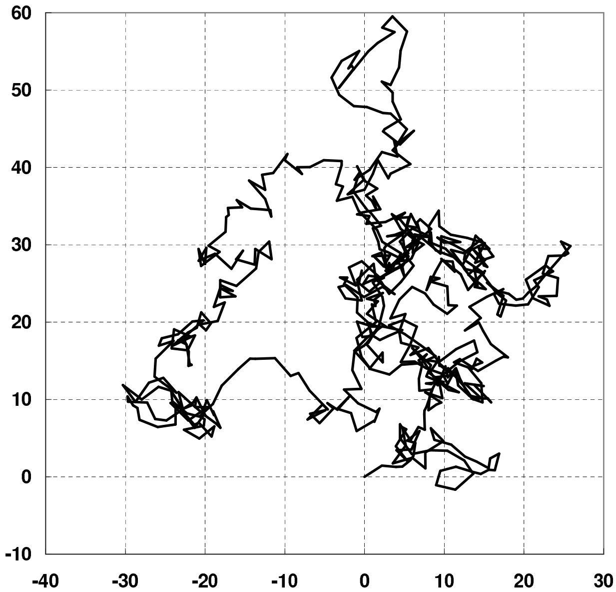

Рисунок 9.1 Движение броуновской частицы

На рисунке изображена траектория движения броуновской частицы от начальной точки с координатами (0,0).

обнаружено в 1826 ботаником Робертом Брауном. Он заметил, что через равные интервалы времени $\Delta t \gg 10^{-10}$ sek броуновская частица перемещается в случайном направлении на случайное расстояние. Положение броуновской частицы, отмеченные через равные интервалы времени, выглядит, например, так, как показано на Рис. 9.1. Природа броуновского движения оставалась загадкой в течение длительного времени.

Можно ли считать, что состояние броуновской частицы определяется положением $\boldsymbol{r}$ и скоростью $\boldsymbol{v}$ и использовать закон Ньютона в стандартной форме

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}, \quad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}) \tag{9.1}$$

для описания динамики частицы? Сила в правой части должна включать случайную составляющую и быть определена так, чтобы описать случайные перемещения частицы, описанные в предыдущих разделах. Мы предполагаем, что система в целом находится в равновесной ситуации.

9.1.1 *Распределение по импульсам*

Результаты наблюдений движения броуновской частицы могут быть интерпретированы так, что частица, находящаяся среди молекул жидкости и взаимодействующая с ними, принимает участие в тепловом движении частиц жидкости. Конечно, при этом полагаем, что броуновская частица не очень велика, но и не мала по сравнению с молекулами жидкости. В равновесной ситуации система распределение скоростей отдельных частиц подчиняется распределению Максвелла (см. раздел 2.3.1)

$$f(\boldsymbol{v}) = C\exp\left(-\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2T}\right) \tag{9.2}$$

где C – постоянная нормировки, m – масса броуновской частицы.

Воспользовавшись табличными значениями интегралов

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

находим среднее значение квадрата скорости броуновской частицы

$$\langle \boldsymbol{v}^2\rangle = \frac{3T}{m} \tag{9.3}$$

9.1.2 *Введение случайных сил*

Можно допустить, что уравнения (9.1) могут быть записаны в виде

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}, \quad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\phi}(t), \tag{9.4}$$

причём случайную силу $\boldsymbol{\phi}(t)$ следует определить так, чтобы в результате вычислений получилось выражение (9.3).

Из уравнений (9.4) имеем

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\phi}(s)\mathrm{d}s$$

затем

$$\frac{\mathrm{d}\langle\boldsymbol{v}^2\rangle}{\mathrm{d}t} = 2\left\langle \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \frac{2}{m}\int_0^t \langle\boldsymbol{\phi}(s)\boldsymbol{\phi}(t)\rangle\mathrm{d}s \tag{9.5}$$

Таким образом, для определения закона изменения среднего квадрата скорости должна быть задана корреляционная функция случайных сил

$$\langle \phi_i(s)\phi_j(t)\rangle$$

Учитывая наши представления о характере случайных сил, мы допускаем независимость рассматриваемой величины от смещения во времени, что значит зависимость от аргумента, и независимость компонент сил друг от друга, так что мы можем записать

$$\langle \phi_i(s)\phi_j(t)\rangle = A\delta_{ij}\delta(t-s) \tag{9.6}$$

где A – дисперсия случайной силы – постоянная, которую следует определить. Эта случайная сила – белый шум.

Теперь, возвращаясь к уравнению (9.5), находим

$$\frac{\mathrm{d}\langle \boldsymbol{v}^2\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{6}{m}A \tag{9.7}$$

что определяет возрастание средней квадратичной скорости частицы

$$\langle \boldsymbol{v}^2\rangle = const + \frac{6}{m}At \tag{9.8}$$

Этот результат свидетельствует о несовершенстве исходных уравнений (9.4).

9.1.3 *Уравнение Ланжевена*

Возрастание средней квадратичной скорости частицы как-то должно быть компенсировано. Ланжевен (Langevin, 1908) ввел силу трения, после чего уравнение движения броуновской частицы приобретает вид

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}, \quad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\zeta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\phi}(t) \tag{9.9}$$

где ζ – коэффициент трения броуновской частицы, который для сферы радиуса a в вязкой жидкости (коэффициент вязкости η) по Стоксу имеет вид

$$\zeta = 6\pi a\eta \tag{9.10}$$

Новый член описывает усредненную реакцию среды, которая может быть и вязкоупругой, если время релаксации конечно.

Перепишем уравнение (9.9) – уравнение Ланжевена – в более компактном виде

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}(t), \quad \gamma = \frac{\zeta}{m}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \frac{\boldsymbol{\phi}(t)}{m} \tag{9.11}$$

Умножим это уравнение на $\mathrm{e}^{\gamma t}$ и проинтегрируем по времени от 0 до t

$$\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma x}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\gamma\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma x}\boldsymbol{v}(x)\mathrm{d}x + \int_0^t \mathrm{e}^{\gamma x}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$$

Левую часть интегрируем по частям, после чего находим скорость

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(0)\mathrm{e}^{-\gamma t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-x)}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$$

Вычислим теперь корреляционную функцию компонент скорости

$$\langle v_i(s)v_j(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\gamma(t+s)}\int_0^t\int_0^s \mathrm{e}^{\gamma(x+u)}\langle f_i(x)f_j(u)\rangle\mathrm{d}x\mathrm{d}u \tag{9.12}$$

Можно полагать, что случайная сила обладает теми же свойствами, что и ранее, так что можно записать

$$\langle \phi_i(s)\phi_j(t)\rangle = m^2\langle f_i(s)f_j(t)\rangle = A\delta_{ij}\delta(t-s) \tag{9.13}$$

что определяет

$$\langle v_i(s)v_j(t)\rangle = \frac{A}{m^2}\delta_{ij}\mathrm{e}^{-\gamma(t+s)}\int_0^t\int_0^s \mathrm{e}^{\gamma(x+u)}\delta(x-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u \tag{9.14}$$

Присутствие дельта-функции по знаком двойного интеграла означает, что интегрирование выполняется по прямой $x = u$ до меньшего из верхних пределов, так что

$$\int_0^t\int_0^s \mathrm{e}^{\gamma(x+u)}\delta(x-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}u = \begin{cases} \displaystyle\int_0^s \mathrm{e}^{2\gamma x}\mathrm{d}x, & s < t, \\ \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{2\gamma x}\mathrm{d}x, & t < s, \end{cases} \tag{9.15}$$

$$\langle v_i(s)v_j(t)\rangle = \frac{A}{2\gamma m^2}\delta_{ij}\mathrm{e}^{-\gamma(t+s)}\cdot\begin{cases} \mathrm{e}^{2\gamma s} - 1, & s < t, \\ \mathrm{e}^{2\gamma t} - 1, & t < s, \end{cases} \tag{9.16}$$

Окончательно, результат можно записать в виде

$$\langle v_i(s)v_j(t)\rangle = \frac{A}{2\gamma m^2}\delta_{ij}\left(\mathrm{e}^{-\gamma|t-s|} - \mathrm{e}^{-\gamma(t+s)}\right) \tag{9.17}$$

Результат не должен меняться при смещении начала отсчета времени, так что второе слагаемое в скобках следует положить нулю (формально при $t \to \infty$). Определяя среднее значение квадрата скорости и сопоставляя его со значением (9.3), находим значение постоянной $A = 2T\zeta$, так что корреляционная функция случайных сил в уравнении (9.9) должна быть задана в виде

$$\langle \phi_i(s)\phi_j(t)\rangle = 2T\zeta\delta_{ij}\delta(t-s) \tag{9.18}$$

для того чтобы получить правильное выражение для среднего квадрата скорости броуновской частицы.

Обратим внимание на то, что флуктуации сил оказываются связанными с коэффициентом трения (вязкости). Соотношения такого типа называют флуктуационно-диссипативнами соотношениями.

9.1.4 *Среднее смещение броуновской частицы*

Случайная сила в уравнении (9.9) определена так, что получается правильный результат для среднего квадрата скорости броуновской частицы, и теперь мы можем подвергнуть уравнение новому испытанию, вычислив средний квадрат смещения, исходя из уравнения (9.9).

Полагая, что в начальный момент времени частица находилась в точке $\boldsymbol{r}(0)$, представим смещение броуновской частицы за время t в виде

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0) = \int_0^t \boldsymbol{v}(x)\mathrm{d}x$$

Среднее значение квадрата смещения броуновской частицы связано с корреляционной функцией скорости частицы

$$\langle \boldsymbol{r}^2\rangle = \int_0^t\int_0^t \langle \boldsymbol{v}(x)\boldsymbol{v}(x')\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}x' \tag{9.19}$$

так что, в силу уравнения (9.17),

$$\langle \boldsymbol{r}^2\rangle = \frac{3T}{m}\int_0^t\int_0^t \mathrm{e}^{-\gamma|x-x'|}\mathrm{d}x\mathrm{d}x' \tag{9.20}$$

Проводим вычисления

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{r}^2 \rangle &= \frac{3T}{m}\left[\int_0^t\int_0^x \mathrm{e}^{-\gamma(x-x')}\mathrm{d}x'\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^{x'} \mathrm{e}^{-\gamma(x'-x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\right] \\
&= \frac{6T}{m\gamma}\int_0^t \left(1-\mathrm{e}^{-\gamma x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{6T}{m\gamma}\left[t + \frac{1}{\gamma}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t}-1\right)\right]
\end{aligned}$$

Таким образом, при больших временах ($t \to \infty$), получаем выражение

$$\langle \boldsymbol{r}^2 \rangle = \frac{6T}{m\gamma}t = \frac{6T}{\zeta}t, \tag{9.21}$$

которое определяет коэффициент диффузии броуновских частиц

$$D = \frac{T}{\zeta} \tag{9.22}$$

9.1.5 *Уравнение для функции распределения*

Динамику броуновской частицы можно описывать другим способом: вместо уравнения Ланжевена для случайных функций координат и импульса $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{p}(t)$ можно установить уравнение для функции распределения этих величин $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, такой, что величина

$$f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

определяет вероятность того, что броуновская частица находится в элементе шестимерного фазового объёма $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{p}$.

Запишем кинетическое уравнение для функции распределения $f(t, \boldsymbol{p})$, следуя Лифшицу и Питаевскому (1979). Для этого введём вероятность изменения импульса броуновской частицы от $\boldsymbol{p}(t)$ к $\boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{q}$

$$w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\,\mathrm{d}\boldsymbol{q}.$$

Тогда кинетическое уравнение для функции $f(t, \boldsymbol{p})$ можно записать в виде

$$\frac{\partial f(t, \boldsymbol{p})}{\partial t} = \int \left[w(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})f(t, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) - w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})f(t, \boldsymbol{p})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{q}$$

В силу того, что изменение импульса $\boldsymbol{q}$ много меньше его среднего значения, первая часть подинтегрального выражения может быть заменена разложением

$$w(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})f(t,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) \approx w(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})f(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}\,\frac{\partial(wf)}{\partial \boldsymbol{p}}\bigg|_{\boldsymbol{q}=0} + q_i q_j\,\frac{\partial^2(wf)}{\partial p_i \partial p_j}\bigg|_{\boldsymbol{q}=0}$$

В результате, при введении очевидных обозначений, кинетическое уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[A_i f + \frac{\partial}{\partial p_j}(B_{ij} f)\right]. \tag{9.23}$$

Записанное соотношение имеет вид уравнения непрерывности в импульсном пространстве, а выражение под знаком производной в правой части представляет плотность потока в импульсном пространстве

$$S_i = -A_i f - \frac{\partial}{\partial p_j}(B_{ij} f) \tag{9.24}$$

В равновесной ситуации, очевидно, поток (9.24) равен нулю, при этом функция распределения имеет вид (9.2), что позволяет связать величины A_i и B_{ij}, и переписать кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[B_{ij}\left(\frac{p_j}{mT} f + \frac{\partial f}{\partial p_j}\right)\right]. \tag{9.25}$$

Это уравнение может быть упрощено далее, если заметить, что зависимостью величины B_{ij} от вектора $\boldsymbol{p}$ можно пренебречь, так что $B_{ij} = \delta_{ij}$, и уравнение (9.25) переписывается следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial t} = B\,\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{p_j}{mT} f + \frac{\partial f}{\partial p_j}\right). \tag{9.26}$$

Коэффициент B играет роль коэффициента диффузии в импульсном пространстве.

Уравнения (9.23), (9.25) и (9.26) представляют различные формы уравнения Фоккера-Планка для функции распределения плотности броуновских частиц по импульсам $f(t,\boldsymbol{p})$. Эти уравнения можно рассматривать локально в каждой точке пространства координат, считая функцию распределения зависящей также от координаты $\boldsymbol{r}$, и потому уравнения (9.23), (9.25) и (9.26) легко превращаются в уравнения для функции $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ при добавлении конвективного слагаемого в пространстве координат. Например, вместо уравнения (9.26) записываем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_j}{m}\frac{\partial f}{\partial r_j} = B\,\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{p_j}{mT}f + \frac{\partial f}{\partial p_j}\right). \tag{9.27}$$

Из последнего уравнения при исключении импульса следует (Уленбек, 1971) уравнение для функции распределения $f(t, \boldsymbol{r})$ – уравнение Эйнштейна-Смолуховского

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\,\frac{\partial f}{\partial r_j \partial r_j}, \tag{9.28}$$

где $D = T/(mB)$ – коэффициент диффузии броуновских частиц. При сравнении с выражением (9.22) находим, что $mB = \zeta$.

9.2 Динамика рыночных отношений

Современные рынки представляют специальным образом организованные системы, в которых большое количество агентов (покупателей и продавцов) взаимодействуют друг с другом и реагируют на доступные сообщения, чтобы определить подходящую цену для данного товара и совершить сделку. Приступая к анализу рыночных отношений, заметим, что объектами обмена на рынках являются как широко известные товары (например, животные, руда, обыкновенные акции, валюты), так и специально изобретённые так называемые производные продукты (derivatives). Примерами таких производных являются фьючерсы и опционы. Фьючерс – это обязательство, согласно которому покупатель обязуется купить актив в оговоренный срок, а продавец - произвести продажу по определенной, зафиксированной в момент заключения договора, цене. В соглашении оговариваются вид актива, его размер, срок исполнения сделки и цена. Список торгуемых фьючерсных товаров не ограничен: есть фьючерсы на металлы, зерно, древесину, хлопок, сталь, нефть, валюту и многое другое. В отличие от фьючерса, опцион включает не обязанность, а лишь право для покупателя опциона приобрести или продать определённый продукт в фиксированное время и по фиксированноё цене. При совершении упомянутых соглашений производители товара и его потребители заранее оговаривают поставку определенного товара на определенную дату по заранее известной цене, страхуя, таким образом, торговые риски.

9.2.1 *Элементарная сделка*

Рассмотрим для начала непосредственно взаимодействующих покупателя и продавца. В элементарном акте обмена агенты не знают об "истиной"цене продукта, таковой просто не существует, но всё же покупатель и продавец назначают свои цены, x_b и x_s, исходя из собственных соображений. Очевидно, что для того, чтобы сделка состоялась, покупатель и продавец должны согласовать цену, так что назначенные покупателем и продавцом цены изменяются со временем, например, по правилам

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_b}{\mathrm{d}t} &= -k_b\,(x_b - x_s) \\ \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} &= -k_s\,(x_s - x_b) \end{aligned} \tag{9.29}$$

В этих простейших уравнениях коэффициенты k_b и k_s зависят от склонности агентов купить или продать продукт и являются случайными положительными величинами. Процесс продолжается до тех пор, пока различие между ценами продавца и покупателя ни становятся несущественным, $x_b \approx x_s$, что определяет окончательную цену. Очевидно, что определяемая в результате завершенной сделки цена x является случайной величиной. Ситуация показана на рисунке 9.2. Значение "истиной"цены, можно полагать, находится в каждый данный момент времени между ценами покупателя и продавца, интервал между которыми уменьшается со временем по закону

$$\frac{\mathrm{d}(x_b - x_s)}{\mathrm{d}t} = -(k_b + k_s)\,(x_b - x_s).$$

Значение текущей цены определяется также случайными начальными значениями цены.

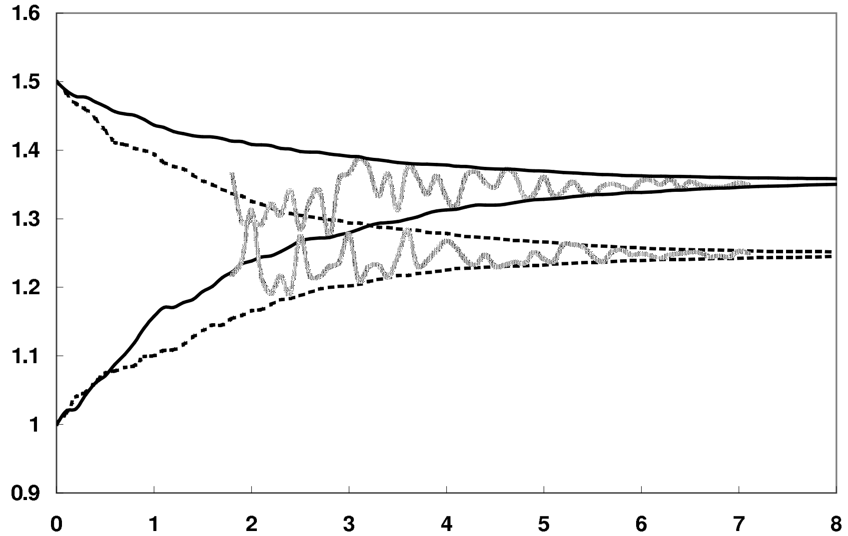

Рисунок 9.2 Установление цены при сделке продавца и покупателя
В начальный момент времени продавец и покупатель назначают свои начальные цены: 1.5 и 1, соответственно. При установлении компромисса, цены продавца и покупателя изменяются согласно уравнениям (9.29) со случайными коэффициентами пропорциональности в правых частях. Пунктирные линии показывают установление цены при одинаковой склонности агентов к компромиссу, а сплошные линии – при большей уступчивости продавца. Точечные кривые между линиями показывают возможную компромиссную цену в двух случаях.

9.2.2 *Теория гарантированного дохода*

Покупателю, приходящему на рынок некоторого продукта с целью получить прибыль, предоставлена возможность выбора: он может приобрести продукт по рыночной цене $S(t)$, которая является случайной функцией времени t, или же заключить контракт на приобретение продукта через определённое время T по определённой заранее цене K. Покупатель имеет определённую сумму денег, которую он может потратить на приобретение продукта

$$m_S S + m_V V = const,$$

где m_S и m_V представляют количества продуктов, приобретаемых различными способами, а S и V – цены продукта на свободном рынке и по контракту. Необходимо найти правило выбора соотношения между количествами продукта, купленного по рыночной цене и количеством продукта (число акций), которое должно быть удержано по фиксированноё цене, с тем, чтобы гарантировать предполагаемый постоянный доход с темпом роста r в любой момент времени t и вычислить цену опции.

Очевидно, что по окончании контракта покупатель имеет выигрыш или потерю в размере $S(T)-K$ на единицу продукта, причём при любой потере стоимость опции, очевидно, равна нулю. Величина

$$V(S,T) = \max\{S(T) - K, 0\} \tag{9.30}$$

может быть принята за цену конкретной опции в момент времени T. До истечения срока действия, контракт может быть продан; возможная цена контракта $V(S,t)$ является некоторой случайной функцией S и t. Замечательно, что Merton (1973), Black and Scholes (1973) предложили метод решения проблемы.[1]

Уравнение Black-Scholes

Предполагается, что рыночная цена является случайной величиной, и подчиняется уравнению

$$dS = \mu\, S\, dt + S\, dz, \tag{9.31}$$

где dz представляет случайную величину с нулевым средним значением и средне-квадратичным отклонением (дисперсией)

$$\overline{dz} = 0, \quad \overline{(dz)^2} = \sigma^2 dt. \tag{9.32}$$

Наряду с этим можно утверждать, что

$$\overline{|dz|} \sim (dt)^{1/2}. \tag{9.33}$$

Интуитивно, $z(t)$ является величиной, которая пульсирует случайным образом; хороший дискретный аналог для $z(t)$ представляет простое случайное

[1] "For a new method to determine the value of derivatives", Merton and Scholes received the 1997 Nobel Prize in Economics (The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel) for their work. Though ineligible for the prize because of his death in 1995, Black was mentioned as a contributor by the Swedish academy.

блуждание. Следует отметить, что $z(t)$, и, следовательно, его бесконечно малое приращение dz, представляет единственный источник случайности в ценовой истории продукта. Таким образом, уравнение (9.31) утверждает, что бесконечно малое изменение цены на продукт S имеет ожидаемое значение $\mu\, dt$ и среднее отклонение $\sigma^2 dt$.

Оценка возможного контракта (the price of a call option) $V = V(S, t)$ в произвольный момент времени является функцией стохастической переменной S; изменение этой величины имеет стохастический компонент так же как детерминированный компонент. Чтобы установить эти компоненты, разложим величину V в ряд Тэйлора

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} dS dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2 + \ldots.$$

Заменяем dS по (9.31) и, сохраняя слагаемые первого порядка по dt и второго порядка по dz, находим:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + S\,\frac{\partial V}{\partial S}(\mu\, dt + dz) + S^2\,\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mu\, dz dt + (dz)^2) + S\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}\, dz dt + \ldots.$$

Далее учитываем соотношения (9.32) и (9.33) и принимаем во внимание только слагаемые не выше первого порядка по dt. Определяя ожидаемое значение dV, находим регулярную и случайную части, что позволяет записать для приращения

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + S \frac{\partial V}{\partial S}\, dz. \tag{9.34}$$

Заметим, что полученное выражение представляет частный случай леммы Ито для двух переменных.

Рассмотрим теперь определённый набор, называемый портфелем, состоящий из одного опциона и продукта в количестве $\frac{\partial V}{\partial S}$ (delta-hedge portfolio). В некоторый момент времени t набор имеет стоимость

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S.$$

Состав портфеля не меняется, но стоимость авуаров может меняться. В интервале времени $[t, t+\Delta t]$, суммарная прибыль или потеря от изменений в стоимости авуаров:

$$\Delta\Pi = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S}\,\Delta S.$$

Используя теперь соотношение (9.31) и (9.34), находим

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t. \tag{9.35}$$

Заметим, что выбор определённого портфеля обеспечивает исчезновение слагаемого со случайным источником из уравнения для изменения стоимости портфеля, который является, таким образом, детерминированным. Норма прибыли на этом портфеле должна быть равной норме прибыли на любом другом беспроигрышном инструменте и равной надежной норме прибыли - r, то есть

$$r\Pi\,\Delta t = \Delta\Pi. \tag{9.36}$$

Если мы теперь приравниваем наши две формулы для $\Delta\Pi$, мы получаем:

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t = r\left(-V + S\frac{\partial V}{\partial S}\right)\Delta t.$$

Из этого соотношения следует известное уравнение для оценки опциона:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{9.37}$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных было установлено Мертоном (Merton, 1973) и Black and Scholes (1973).

Приведённый вывод уравнения не является единственным; уравнение может быть получено при различных предположениях о составе портфолио (Kishimoto, 2008).

Формула Black-Scholes

Различные формулы для оценки опции находятся при решении уравнения (9.37) при различном выборе функции выплаты при истечения срока контракта, что определяет граничные условия. Найдём теперь цену европейской опции, следуя работе . Для этого выбираем начальные и граничные условия в виде

$$V(0,t) = 0, \quad for\ all\ t$$
$$V(S,t) \to S,\ as\ S \to \infty$$

$$V(S,T) = \max\{S-K, 0\}. \tag{9.38}$$

Последнее условие определяет цену опции при завершении контракта.

Легко проверить, что при введении новых переменных по правилам

$$u = V\, e^{r\tau},$$

$$\tau = T - t,$$

$$x = \ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau \tag{9.39}$$

уравнение (9.37) превращается в уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Граничное условие $V(S,T) = \max\{S-K, 0\}$ теперь становится начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x) \equiv K(e^{\max\{x,0\}} - 1). \tag{9.40}$$

Стандартное решение уравнения диффузии имеет вид

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right) dy.$$

Это выражение, при использовании начального условия (9.41) после некоторых манипуляций приобретает вид

$$u(x,\tau) = Ke^{x+\sigma^2\tau/2}N(d_1) - KN(d_2),$$

где $N(\cdot)$ является функцией распределения стандартного нормального распределения

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

с аргументами

$$d_1 = \frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = \frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Возвращаясь теперь к первоначальному набору переменных, находим решение уравнения Black-Scholes в терминах параметров задачи и определяем оценку опции (call option):

$$V(S,t) = N(d_1)\ S - N(d_2)\ K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{9.41}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Кроме того,

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Возможно, очевидно, подобное вычисление для опции-продажи (put option). Существуют также различные обобщения теории (Hull, 2011).

9.3 Элементарная теория рынка

Закономерности рынка оказываются независящими от вида торгуемых товаров, будь то, например, животные, руда, обыкновенные акции, валюты, облигации, или производные продукты (derivatives) сконструированные на основных финансовых продуктах, и оказываются доступными для теоретического изучения. Далее излагается простая теория рынка одного продукта, инспирированная работой Бучо и Конта (Bouchaud and Cont, 2002). Здесь мы не рассматриваем наличие различных соглашений (контрактов) о купле-продаже, по которым стороны имеют право или обязанность приобрести или продать определённый продукт в фиксированное время и по фиксированноё цене, которые должны рассматриваться как отдельные продукты.

9.3.1 *Фундаментальные соотношения теории рынка*

Рассмотрим ситуацию, когда рынок посещают множество экономических агентов, причём покупатели и продавцы не встречаются непосредственно, а взаимодействуют с агентами рынка. Каждый покупатель и продавец приходит на рынок со своим представлением о "справедливых ценах", x_b и x_s, соответственно, и совершает операцию купли-продажи, заботясь о собственной выгоде и ориентируясь на рыночную цену продукта $x(t)$. Очевидно, рыночная цена $x(t)$ находится где-то между господствующими представлениями о "справедливых"ценах, так что считаем, что выполняется соотношение

$$x_b < x(t) < x_s \tag{9.42}$$

Решения участников рыночного процесса и их предпочтения влияют на ход событий (Soros, 1988), и закон изменения рыночной цены оказывается достаточно сложным, как свидетельствуют наблюдения[2].

Численность рыночных агентов

Мотивы прихода покупателей и продавцов на рынок связаны с их внерыночной деятельностью, так что считаем число покупателей и продавцов, появляющихся на рынке в единицу времени (скорости появления), v_b и v_s, заданными случайными величинами. Можно, конечно, представить ситуацию, когда потоки продавцов и покупателей на рынок следуют колебаниям рыночной цены продукта, но такую ситуацию не будем в последующем принимать во внимание.

Рассматривая рынок одного продукта, полагаем, что на рынке одновременно присутствуют n_b покупателей и n_s продавцов. Определенная доля покупателей и продавцов под влиянием новой информации, индивидуальной потребности в наличных деньгах, или специфических инвестиционных стратегиях совершает свою сделку. Можно думать, что после совершения сделки часть рыночных агентов не покидает рынок, а ждёт момента, чтобы с целью получения прибыли продать или купить только что приобретённый или проданный продукт, так что для численности экономических агентов на рынке мы можем записать простые балансовые соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dn_b}{dt} &= v_b - \gamma_b n_b + \alpha_s \gamma_s n_s, \quad 0 \le \alpha_s \le 1 \\ \frac{dn_s}{dt} &= v_s - \gamma_s n_s + \alpha_b \gamma_b n_b, \quad 0 \le \alpha_b \le 1. \end{aligned} \tag{9.43}$$

Вторые члены в правых частях этих уравнений представляют число совершенных сделок; положительные величины γ_b и γ_s являются индивидуальными склонностями к покупке или продаже, соответственно. Последние слагаемые в уравнениях (9.43) представляют числа агентов, прицеливающихся к новым сделкам, причём α_b и α_s являются долями покупателей и продавцов, не покинувших рынок после совершения сделок. Заметим, что $\alpha_b = 1$ и $\alpha_s = 1$, если все агенты остаются на рынке, чтобы участвовать в операциях с целью получения спекулятивной прибыли.

[2]Регулярные и статистические свойства цены являются предметом изучения эконофизики (Mantegna & Stanley, 1999, Дубовиков и Старченко, 2007).

Закон изменения цены

Для определённости удобно использовать известную зависимость между ценой и разницей между спросом и предложением, установленную при детальном описании обменных процессов (Walras, 1874). Для простоты мы полагаем, что каждый рыночный агент приходит с единицей продукта. Это предположение позволяет свести выражения для спроса-предложения к числу агентов и записать, ограничиваясь линейным приближением, регулярное изменение цены $x(t)$ в зависимости от соотношения между спросом и предложением в виде

$$\frac{dx}{dt} = r\ (n_b - n_s)\,, \tag{9.44}$$

где $1/r$ является мерой глубины рынка, то есть избыточный спрос, необходимый, чтобы сдвинуть цену на единицу. Когда r мало, рынок может 'поглотить' различие между предложением и спросом при очень малых изменениях цены.

Уравнения (9.43) и (9.44) представляют систему уравнений для рыночной цены и числа агентов на рынке. Эти уравнения являются стохастическими уравнениями, поскольку скорости прибытия покупателей и продавцов следует считать случайными величинами, что определяет, что цена продукта $x(t)$ также является случайной величиной.

9.3.2 *Формализация поведения рыночных агентов*

В балансовые соотношения (9.43) входят величины, характеризующие поведение рыночных агентов: индивидуальные склонности к совершению сделки, γ_b и γ_s, и склонности к совершению спекулятивных сделок α_b и α_s. Рыночные агенты (покупатели и продавцы) совершают свои операции, не зная значения "истинной"цены продукта, при этом экономические агенты ориентируются не только на текущее значение рыночной цены $x(t)$ и свои представления о "справедливых"ценах, но и на скорость изменения рыночной цены, учитывая другие возможные сообщения. Эти эффекты определяют, в конце концов, изменение цены во времени, но делают вычисление спроса и предложения более сложным.

Склонности к совершению сделки

Можно думать, что стратегия поведения агента определяется двумя обстоятельствами (Сорос, 2000). Во-первых, многие агенты подражают своим партнёрам, следуя доминирующему тренду. Далее, индивидуальные склонности к совершению сделки, γ_b и γ_s, определяются также непосредственно ожиданием увеличения или уменьшения цены, о чем агенты судят по текущей тенденции изменения. Указанные соображения могут быть формализованы следующим образом

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\gamma_b}{\mathrm{d}t} &= \mu_b(\gamma_b - \gamma_b^0) + \sigma_b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \psi_b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \ldots, \\
\frac{\mathrm{d}\gamma_s}{\mathrm{d}t} &= \mu_s(\gamma_s - \gamma_b^0) - \sigma_s\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \psi_s\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \ldots, \qquad (9.45)
\end{aligned}$$

где величины γ_b^0 и γ_s^0 означают некоторые собственные значения склонностей к совершению сделки. В силу сделанных выше утверждений коэффициенты μ_b и μ_s следует считать положительными величинами. При ожидании возрастания цены число покупателей увеличивается, а число продавцов уменьшается, так что считаем, что величины σ_b и σ_s также являются положительными величинами. Слагаемые второго порядка можно связать с ожидаемым риском при значительных колебаниях цен (Bouchaud and Cont, 2002). Чем больше колебание цен, тем менее возникает желание совершать сделку, и, следовательно, величины ψ_b и ψ_s следует считать положительными величинами.

Склонности к спекулятивным сделкам

Совершенно подобным образом можно рассмотреть склонности к спекулятивным сделкам. Доли не покинувших рынок агентов, α_b и α_s, определяются как следованием доминирующему тренду, так и ожиданием увеличения или уменьшения цены, о чем агенты судят по первой производной цены, так что могут быть записаны уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\alpha_b}{\mathrm{d}t} &= \nu_b(\alpha_b - \alpha_b^0) + \beta_b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \phi_b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \ldots, \\
\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}t} &= \nu_s(\alpha_s - \alpha_b^0) - \beta_s\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \phi_s\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \ldots, \qquad (9.46)
\end{aligned}$$

где величины α_b^0 и α_s^0 означают некоторые собственные значения склонности к спекулятивным сделкам. Предполагая склонность к подражанию, коэффициенты ν_b и ν_s следует считать положительными величинами. При ожидании возрастания цены число покупателей увеличивается, а число продавцов уменьшается, так что считаем, что величины β_b и β_s также являются положительными величинами. Слагаемые второго порядка можно связать с ожидаемым риском при значительных колебаниях цен (Bouchaud and Cont, 2002). Чем больше колебание цен, тем менее возникает желание совершать сделку, и, следовательно, величины ϕ_b и ϕ_s следует считать положительными величинами.

Мотивация рыночных агентов

Экономические агенты приходят на рынок со своими интересами, поэтому необходима оценка достигаемой агентами выгоды от рыночных операций. Полагаем, что первоначально покупатели приходят на рынок с некоторой суммой денег, рассчитывая приобрести продукт, а продавцы доставляют товар, предполагая его продать. В идеальной ситуации, при $\alpha_b = 0$ и $\alpha_s = 0$ происходит обмен продукта на деньги, и все агенты покидают рынок довольными. В этом простом случае первоначальное количество денег у покупателей убывает, а продавцы приобретают некоторое количество денег, так что количество денег у покупателей и продавцов, $M_b(t)$ и $M_s(t)$, соответственно, определяются уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}M_b(t)}{\mathrm{d}t} &= xv_b - \gamma_b n_b x, \quad M_b(0) = M_0, \\
\frac{\mathrm{d}M_s(t)}{\mathrm{d}t} &= \gamma_s n_s x, \quad M_s(0) = 0. \qquad (9.47)
\end{aligned}$$

Эти уравнения описывают притекание денег на рынок и их переход от покупателей к продавцам. Заметим, что по-прежнему полагаем, что каждый рыночный агент приходит с единицей продукта. При этом выполняется соотношение $\gamma_b n_b = \gamma_s n_s$.

Если $\alpha_b \neq 0$ и $\alpha_s \neq 0$, некоторые агенты попеременно становятся то покупателями, то продавцами, и в этом случае ситуация усложняется. Можно полагать, что в некоторый момент времени покупатели приобретают продукт, часть из них покидает рынок, оставшаяся часть $\alpha_b \gamma_b n_b$ становятся продавцами и через некоторый интервал времени $\Delta_s t$ выходят на рынок. Одновременно первоначальные продавцы получают некоторое количество денег, причём часть из этого количества $\alpha_s \gamma_s n_s x$ тратят через некоторый интервал $\Delta_b t$ на покупку продукта. При описанной идеализации можно записать уравнения для изменения количества наличных денег у покупателей и продавцов, $M_b(t)$ и $M_s(t)$, в каждый момент времени

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M_b(t)}{\mathrm{d}t} &= x v_b - (\gamma_b n_b x)_t + (\alpha_s \gamma_s n_s x)_{t-\Delta_b t},\\ \frac{\mathrm{d}M_s(t)}{\mathrm{d}t} &= (\gamma_s n_s x)_t - (\alpha_b \gamma_b n_b x)_{t-\Delta_s t}.\end{aligned} \tag{9.48}$$

Последние слагаемые в правых частях этих уравнений являются некоторой оценкой при подходящем выборе значений интервалов запаздывания совершения повторных сделок. Очевидно, что

$$\Delta_b t \approx \gamma_b^{-1}, \quad \Delta_s t \approx \gamma_s^{-1}.$$

Для более аккуратного описания ситуации следовало бы прослеживать историю каждого агента, как это делается в 'the agent-based theories' (см. обзор Samanidou et al, 2007).

9.3.3 *Эволюционные уравнения*

Рассмотренные соотношения дают основу для формулировки замкнутой системы уравнений при различных допущениях. Ограничимся далее учётом слагаемых со второй степенью производной первого порядка. В этом случае на основе уравнений (9.43), (9.44), (9.45) и (9.46) записываем систему уравнений для переменных рынка

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r\,(n_b - n_s)\,,\\ \frac{dn_b}{dt} &= v_b - \gamma_b n_b + \alpha_s\,\gamma_s n_s,\\ \frac{dn_s}{dt} &= v_s - \gamma_s n_s + \alpha_b\,\gamma_b n_b,\\ \frac{\mathrm{d}\gamma_b}{\mathrm{d}t} &= \mu_b(\gamma_b - \gamma_b^0) + r\,\sigma_b\,(n_b - n_s) - r^2\,\psi_b\,(n_b - n_s)^2\,,\\ \frac{\mathrm{d}\gamma_s}{\mathrm{d}t} &= \mu_s(\gamma_s - \gamma_s^0) - r\,\sigma_s\,(n_b - n_s) - r^2\,\psi_s\,(n_b - n_s)^2\,,\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_b}{\mathrm{d}t} = \nu_b(\alpha_b - \alpha_b^0) + r\,\beta_b\,(n_b - n_s) - r^2\,\phi_b\,(n_b - n_s)^2\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}t} = \nu_s(\alpha_s - \alpha_b^0) - r\,\beta_s\,(n_b - n_s) - r^2\,\phi_s\,(n_b - n_s)^2\,. \qquad (9.49)$$

Все переменные системы являются положительными величинами, причём склонности к спекулятивным сделкам ограничены: $0 \leq \alpha_s \leq 1$ и $0 \leq \alpha_b \leq 1$. При рассмотрении системы должны быть заданы постоянные параметры: r, μ_b и μ_s, ν_b и ν_s, σ_b и σ_s, β_b и β_s, ψ_b и ψ_s, ϕ_b и ϕ_s. Собственные значения индивидуальных склонностей γ_b^0, γ_s^0 и α_b^0, α_s^0 являются стационарными решениями системы и могут быть выражены через перечисленные параметры системы. Предполагаем, что потоки покупателей и продавцов, v_b и v_s, также заданы, как функции времени, и имеют случайную составляющую.

Обратим внимание на некоторое соответствие уравнений (9.49) описанию функционирования рынка Соросом (2001), согласно которому на рынке действуют три фактора: котировка, основной тренд и превалирующее предпочтение, чему в используемых нами терминах соответствуют: цена продукта x, первая производная цены $\frac{dx}{dt} = r\,(n_b - n_s)$ и индивидуальные склонности агентов к совершению сделок. Игра этих факторов определяет поведение решения системы уравнений (9.49).

При определённых предположениях из системы (9.49) следуют уравнения, которые совпадают со стохастическими уравнениями Бучо и Конта (Bouchaud and Cont, 2002), если, конечно, из последних исключить "фундаментальную"цену продукта, введение которой не имеет достаточных оснований. Можно надеяться, что система (9.49), также как и система, описанная Бучо и Контом (Bouchaud and Cont, 2002), описывает некоторые особенности динамики рынка.

9.3.4 *Особенности динамики рынка*

Анализ система нелинейных обыкновенных уравнений (9.49) для вычисления траектории цены в общем виде оказывается достаточно громоздкой в силу наличия многих параметров, характеризующих рынок. Начнём с рассмотрения некоторых простых случаев.

Стационарное состояние рынка

В этом случае все переменные не меняются во времени; значения величин, характеризующих агентов, постоянны и равны α_s^0, α_b^0, γ_b^0, γ_s^0. При этом система (9.49) определяет соотношения для стационарных значений численностей агентов

$$\begin{aligned} 0 &= v_b - \gamma_b^0 n_b^0 + \alpha_s^0 \gamma_s^0 n_s^0, \\ 0 &= v_s - \gamma_s^0 n_s^0 + \alpha_b^0 \gamma_b^0 n_b^0. \end{aligned} \tag{9.50}$$

При $\alpha_b^0 = 1$ и $\alpha_s^0 = 1$ соотношения определяют линейную зависимость

$$\gamma_b^0 n_b^0 = v_b + \gamma_s^0 n_s^0, \tag{9.51}$$

причем условие совместности двух уравнений требует, чтобы $v_b = -v_s$.

При $\alpha_b^0 \neq 1$ и $\alpha_s^0 \neq 1$ уравнения (9.50) определяют стационарные (собственные) склонности агентов к совершению сделки

$$\begin{aligned} \gamma_b^0 &= \frac{1}{n_b^0} \frac{v_b + \alpha_s^0 v_s}{1 - \alpha_b^0 \alpha_s^0}, \quad 0 \leq \alpha_s^0 < 1 \\ \gamma_s^0 &= \frac{1}{n_s^0} \frac{v_s + \alpha_b^0 v_b}{1 - \alpha_b^0 \alpha_s^0}, \quad 0 \leq \alpha_b^0 < 1. \end{aligned} \tag{9.52}$$

При этом из первого уравнения из системы (9.49) в стационарном случае следует, что

$$n_b^0 = n_s^0, \tag{9.53}$$

так что не все из шести величин в правых частях равенств (9.52) могут быть заданы независимо. Склонности агентов к совершению сделки, например, связаны соотношением

$$\gamma_s^0 = \gamma_b^0 \frac{v_s + \alpha_b^0 v_b}{v_b + \alpha_s^0 v_s}. \tag{9.54}$$

Цена продукта сохраняет постоянное значение, но это "равновесное" значение (в том смысле, какое придают этому слову экономисты) не является "фундаментальной"ценой или ценой выделенной в каком либо отношении. Скорее, это случайная величина, внутри не точно определённого интервала (9.42) (см. также раздел 9.2.1).

Колебания переменных рынка

Рассмотрим вначале рынок, на который агенты приходят, чтобы обменять деньги на продукт и наоборот, без намерений перепродавать, для чего полагаем в уравнениях (9.49) величины $\alpha_s = 0$, $\alpha_b = 0$. Тогда система уравнений эволюции приобретает вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= r\,(n_b - n_s)\,, \\
\frac{dn_b}{dt} &= v_b - \gamma_b n_b, \\
\frac{dn_s}{dt} &= v_s - \gamma_s n_s, \\
\frac{\mathrm{d}\gamma_b}{\mathrm{d}t} &= \mu_b(\gamma_b - \gamma_b^0) + r\,\sigma_b\,(n_b - n_s) - r^2\,\psi_b\,(n_b - n_s)^2\,, \\
\frac{\mathrm{d}\gamma_s}{\mathrm{d}t} &= \mu_s(\gamma_s - \gamma_s^0) - r\,\sigma_s\,(n_b - n_s) - r^2\,\psi_s\,(n_b - n_s)^2\,, \qquad (9.55)
\end{aligned}$$

Стационарные значения склонностей к совершению сделки определяются как частный случай соотношений (9.52)

$$\gamma_b^0 = \frac{v_b}{n_b^0}, \quad \gamma_s^0 = \frac{v_s}{n_s^0}. \qquad (9.56)$$

Для начала опустим нелинейные слагаемые с параметрами ψ_b и ψ_s в последних уравнениях системы (9.55). Рисунок 9.3 показывает типичную картину эволюции первоначально стационарного рынка, проявляющуюся при широком варьировании параметров системы. Решение демонстрирует колебания с увеличивающейся амплитудой, причём период колебаний контролируется величинами σ_b и σ_s: чем меньше эти величины, тем больше период колебаний. Восстановление слагаемых с ненулевыми значениями параметров ψ_b и ψ_s в последних уравнениях системы (9.55) приводит, как и следовало ожидать, к уменьшению амплитуды колебаний всех переменных. Колебания возникают при случайных отклонениях переменных от стационарных значений; если случайная составляющая отсутствует, рынок остаётся в стационарном состоянии.

Наличие спекулянтов ($\alpha_b \neq 0$ и $\alpha_s \neq 0$) не меняет качественно характер колебаний и не влияет существенно на движение цены, так что, по-видимому, основной особенностью решения системы уравнений (9.49) в любом случае являются наличие колебаний с увеличивающейся амплитудой, описывающих крушение рынка. Поскольку всегда есть место

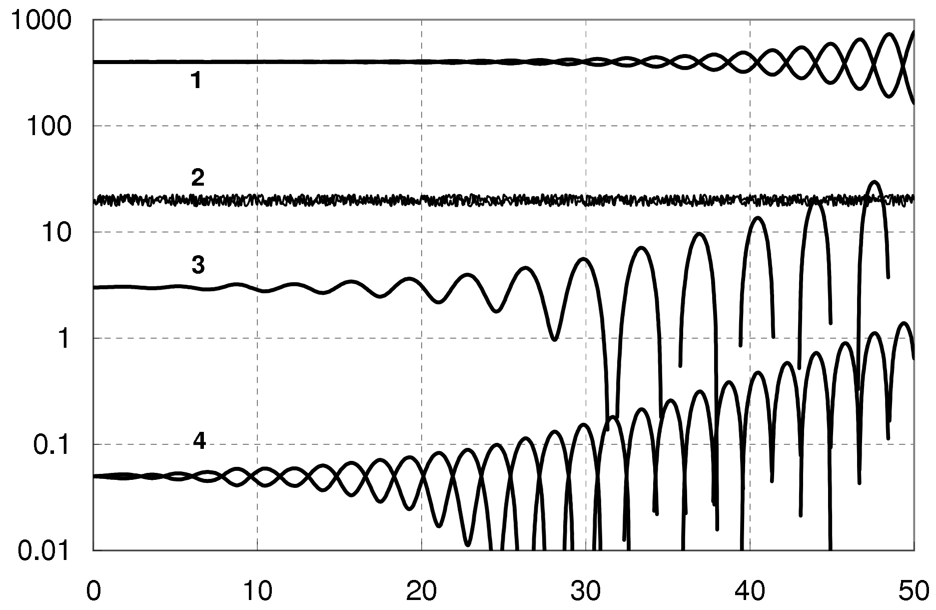

Рисунок 9.3 Разрушение стационарного рынка

На рисунке изображены: численность покупателей и продавцов при начальных значениях $n_b^0 = n_s^0 = 400$ (линии 1); потоки (в единицу времени) покупателей и продавцов на рынок: $v_b = v_s = 20$ со случайной составляющей (линии 2); цена продукта с начальным значением $x = 3$ (кривая 3); индивидуальные склонности к совершению сделки при начальных значениях $\gamma_b^0 = \gamma_s^0 = 0.05$ (кривые 4). В качестве начальных значений переменных приняты стационарные значения. Индивидуальные склонности к совершению спекулятивных сделок положены равными нулю: $\alpha_b = \alpha_s = 0$. Около значения времени $t = 30$ цена продукта падает и рынок оказывается полностью разрушен. Системы уравнений (9.55) решена при значениях параметров: $r = 0.1$, $\mu_b = \mu_s = 0.05$, $\sigma_b = \sigma_s = 0.04$, $\psi_b = \psi_s = 0$.

случайностям, то реальный рынок находится или в фазе подъёма или в фазе спада цены. Эта особенность была отмечена и оседлана финансовым спекулянтом Соросом (Soros, 2001). Цена колеблется около некоторого значения, которое, конечно, не является "фундаментальной"ценой, такой просто не существует, но произвольной величиной внутри интервала (9.42).

9.3.5 *Исследование устойчивости рынка*

Система (9.49) очевидно проявляет неустойчивое поведение. Это понятно, поскольку четыре последних уравнения в системе (9.49) содержат слагаемые с положительной обратной связью, что определяет возможности для неконтролируемого увеличения переменных, как это было продемонстрировано в предыдущем разделе. Из этого следует, что при некоторых значениях параметров задачи система оказывается неустойчивым, чему можно сопоставить наблюдения реальных рынков. Представляет интерес формальное изучение устойчивости с тем, что чтобы определить критерии устойчивости/неустойчивости и оценить период колебаний рынка через параметры системы.

Система уравнений для малых отклонений от стационарных значений

Рассматривая теперь малые отклонения от стационарных значений

$$\begin{aligned} y_b &= n_b - n_b^0, \qquad & y_s &= n_s - n_s^0, \\ z_b &= \gamma_b - \gamma_b^0, \qquad & z_s &= \gamma_s - \gamma_s^0, \\ u_b &= \alpha_b - \alpha_b^0, \qquad & u_s &= \alpha_s - \alpha_s^0 \end{aligned} \tag{9.57}$$

находим в линейном приближении из уравнений (9.48)

$$\begin{aligned} \frac{dy_b}{dt} &= -\gamma_b^0 y_b + \alpha_s^0\,\gamma_s^0 y_s + u_s\,\gamma_s^0 n_s^0 + \alpha_s^0\,z_s n_s^0, \\ \frac{dy_s}{dt} &= -\gamma_s^0 y_s + \alpha_b^0\,\gamma_b^0 y_b + u_b\,\gamma_b^0 n_b^0 + \alpha_b^0\,z_b n_b^0, \\ \frac{\mathrm{d}z_b}{\mathrm{d}t} &= \mu_b\,z_b + r\,\sigma_b\,(y_b - y_s)\,, \\ \frac{\mathrm{d}z_s}{\mathrm{d}t} &= \mu_s\,z_s - r\,\sigma_s\,(y_b - y_s)\,, \\ \frac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t} &= \nu_b\,u_b + r\,\beta_b\,(y_b - y_s)\,, \\ \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} &= \nu_s\,u_s - r\,\beta_s\,(y_b - y_s)\,. \end{aligned} \tag{9.58}$$

Эта система уравнений определяет динамику рынка около стационарной точки.

Устойчивость стационарного состояния при постоянных характеристики поведения агентов

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением критериев устойчивости системы с постоянными индивидуальными характеристиками агентов. Будем считать величины α_s, α_b, γ_b и γ_s заданными и постоянными, после чего система (9.54) сводится к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dy_b}{dt} &= -\gamma_b^0 y_b + \alpha_s^0\,\gamma_s^0 y_s, \\ \frac{dy_s}{dt} &= -\gamma_s^0 y_s + \alpha_b^0\,\gamma_b^0 y_b. \end{aligned} \tag{9.59}$$

Предполагая решение в виде $y_b \sim \exp\lambda t,\; y_s \sim \exp\lambda t$, находим систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} -(\gamma_b^0+\lambda)y_b + \alpha_s\,\gamma_s^0 y_s &= 0, \\ \alpha_b\,\gamma_b^0 y_b - (\gamma_s^0+\lambda)y_s &= 0, \end{aligned}$$

Условие совместности определяет уравнение для λ

$$(\gamma_b^0+\lambda)(\gamma_s^0+\lambda) - \alpha_b\,\alpha_s\,\gamma_b^0\,\gamma_s^0 = 0$$

или

$$\lambda^2 + (\gamma_b^0+\gamma_s^0)\lambda + (1-\alpha_b\,\alpha_s)\,\gamma_b^0\,\gamma_s^0 = 0$$

Решение имеет вид

$$\lambda = -\frac{1}{2}(\gamma_b^0+\gamma_s^0) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\gamma_b^0+\gamma_s^0)^2 - (1-\alpha_b\,\alpha_s)\,\gamma_b^0\,\gamma_s^0} \tag{9.60}$$

При $\alpha_b = 1$ и $\alpha_s = 1$ одно значение нулевое, второе – отрицательно. Отсюда следует, что чисто спекулятивный рынок при сделанных предположениях всегда устойчив. При $\alpha_b \neq 1$ и $\alpha_s \neq 1$ значение λ может быть комплексным, если

$$\frac{4\gamma_b^0\,\gamma_s^0}{(\gamma_b^0+\gamma_s^0)^2} > 1,$$

что указывает на существование колебаний переменных около стационарной точки. Однако ни при каких условиях λ не принимает действительных положительных значений, и неустойчивость не может возникнуть в случае постоянных значений склонностей агентов к совершению сделок.

В случае, когда характеристики поведения агентов изменяются в процессе развития рынка, следует обратиться к системе уравнений (9.58) для оценки устойчивости рынка. По сравнению со случаем неизменных характеристик поведения, анализ оказывается более сложным, и этой задачей мы не будем здесь заниматься.

9.4 Литература

Дубовиков М.М., Старченко Н.В. Эконофизика и анализ финансовых времянных рядов. Сборник ЭАИ МИФИ "Эконофизика. Современная физика в поисках экономической теории". Москва, 2007.

Лифшиц Е.М. и Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. Наука: Главная редакция физико-математической литературы: Москва, 1979.

Уленбек Г. 1971. Фундаментальные проблемы статистической Механики. Успехи Физических Наук, Том 103, вып. 2, 275 -318.

Джон К. Халл Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты = Options, Futures and Other Derivatives. - 6-е изд. - М.: "Вильямс", 2007. - С. 1056. - ISBN 0-13-149908-4

Aristotle, Politics, trans. Benjamin Jowett, vol. 2, The Great Books of the Western World, book 1, chap. 11, p. 453.

L. Bachelier. Theorie de la speculation [Ph.D. thesis in mathematics], Annales Scietifiques de l'ecole Normale Superieure 111-17, 21-86 (1900)

Black, Fischer; Myron Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Journal of Political Economy 81 (3): 637-654. doi:10.1086/260062. [1] (Black and Scholes' original paper.)

Merton, Robert C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation) 4 (1): 141-183. doi:10.2307/3003143. JSTOR 3003143. [2]

Bouchaud J-P, Cont R (2002) A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes. European Physical Journal B 6, 543-550.

John C. Hull Options, Futures and Other Derivatives (8th Edition) by Publisher: Prentice Hall 2011

Manabu Kishimoto, On the Black-Scholes Equation: Various Derivations. MS&E 408 Term Paper, May 29, 2008. http://www.stanford.edu/ japrimbs/Publications/OnBlackScholesEq.pdf

Paul Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. C. R. Acad. Sci. (Paris) **146**, 530 - 533 (1908). Engl. transl. available in: Don S. Lemons and Anthony Gythiel. Paul Langevin's paper "On the theory of Brownian motion"["Sur la théorie du mouvement brownien,"C. R. Acad. Sci. (Paris) **146**, 530 - 533 (1908)], Am. J. Phys. **65** (11), 1079 - 1081 (1997).

R. N. Mantegna, H. E. Stanley, An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance, Cambridge University Press (1999)

Samanidou, E., Zschischang, E., Stauffer, D., Lux, T., Agentbased models of financial markets. Report on progress in physics, 70 (2007) 409-450

George Soros. The Alchemy of Finance (Simon & Schuster, 1988). Перевод: Джордж Сорос. Алхимия финансов. Издательский Дом ИНФРА-М, Москва, 2001.

Walras, L. (1874), *Elements d'economie politique pure ou theorie de la richesse sociale*, Corbaz, Lausanne. Перевод: Вальрас Леон. Элементы чистой политической экономии или теория общественного богатства. Изограф, Москва, 2000, 448 стр.

R.G. Palmer, W. Brian Arthur, John H. Holland, Blake LeBaron and Paul Tayler, Artificial economic life: a simple model of a stockmarket. Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 75, Issues 1-3, 1 August 1994, Pages 264-274