

Федеральное агентство по образованию
—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

П. А. Жилин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2006

Федеральное агентство по образованию
—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

П. А. Жилин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2006

УДК 539.3 (075.8)

ББК 22.251я73

Ж 721

Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины ОПД.Ф.10 “Механика деформируемого твердого тела” подготовки магистров по направлению 510000 “Естественные науки и математика”, специальности 510300 “Механика” и 511300 “Механика. Прикладная математика и механика”.

В пособии рассмотрена общая теория простых оболочек, построены модели термоупругих оболочек постоянной толщины, двухслойных оболочек и тонких трехслойных оболочек симметричного строения. Дан краткий исторический обзор возникновения и развития теории оболочек. Метод построения теории оболочек принципиально отличается от всех известных вариантов построения теории оболочек и легко переносится на другие объекты механики сплошных сред. Главная особенность метода в том, что с его помощью можно изучать объекты типа оболочек сложного внутреннего строения, т. е. в тех случаях, когда традиционные методы построения теории оболочек не применимы. Применительно к оболочкам постоянной толщины из изотропного материала новый метод ведет к результатам, которые хорошо согласуются с полученными классическими методами и дают превосходное согласие с трехмерной теорией упругости при любых внешних воздействиях, включая сосредоточенные силы. Введено важное дополнение в алгебру тензоров, а именно понятие ориентированных тензоров, т. е. объектов, зависящих от выбора ориентации как в трехмерном пространстве, так и в его подпространствах. Для ориентированных тензоров сформулирована теория симметрии, обобщающая классическую теорию симметрии, которая применима только для евклидовых тензоров. Предложенная теория оказывается необходимой при построении определяющих уравнений мультиполярных сред, а также при рассмотрении ионных кристаллов.

Предназначено для студентов, изучающих физико-математические и технические специальности, а также аспирантов и преподавателей, деятельность которых связана с вопросами механики.

Табл. 4. Ил. 6. Библиогр.: 290 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 5-7422-1215-1

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2006

© Жилина О. П., 2006

Введение

Множество конструкций типа оболочек, находящих применение в технике и строительстве, увеличивается и в настоящее время. Из этого множества были выделены некоторые подмножества элементов, обладающих сходными свойствами; для них были разработаны соответствующие варианты теорий оболочек. Среди последних нужно отметить следующие: 1) теорию тонких однослойных оболочек; 2) теорию конструктивно-анизотропных оболочек; 3) теорию ребристых оболочек; 4) теорию тонких многослойных оболочек; 5) теорию перфорированных оболочек; 6) теорию сетчатых оболочек; 7) теорию однослойных оболочек не малой толщины и целый ряд других. В рамках каждого из перечисленных вариантов можно указать несколько версий, различающихся как исходными посылками, так и конечными уравнениями.

Из сказанного можно заключить, что современная теория оболочек — это глубоко разработанные разделы механики деформируемого тела. Однако процесс развития теорий оболочек нельзя считать законченным, поскольку в технике непрерывно возникают новые конструкции, расчет которых в рамках существующих вариантов теорий оказывается невозможным.

В этой связи неизбежно возникновение новых вариантов. Вероятно, можно утверждать, что число таких нетрадиционных конструкций будет возрастать. Это связано с выходом современной техники на чрезвычайно высокий уровень эксплуатационных параметров. Причем, реализация многих современных проектов требует разработки конструкций типа оболочек весьма сложного внутреннего строения, поскольку приходится решать одновременно несколько проблем. Многочисленные примеры конструкций такого рода доставляют термоядерная и атомная энергетика, химическое машиностроение, криогенная техника, новейшие конструкции пьезоэлектрических излучателей, космическая техника и т. д. При эскизном проектировании этих конструкций большую роль играют методы теории оболочек, ибо они позволяют наиболее просто проследить влияние тех или иных параметров и подсказать пути улучшения конструкций. На стадии разработки проекта сведения, доставляемые теорией оболочек, часто оказываются недостаточными и нужно проводить уточненный расчет по более сложным теориям. Но здесь уже многие параметры практически фиксированы, и идет уточнение деталей. Как известно, большую роль в исследовании конструкций типа оболочек сложного внутреннего строения играет концепция оболочки с приведенными модулями. Несмотря на значительную ограниченность такого подхода, он все-таки оказывается очень полезным в практическом отношении. Однако использование концепции оболочки с приведенными модулями в настоящее время требует от инженера известной изобретательности и опыта, поэтому представляется целесообразным выявить основные закономерности и приемы построения уравнений, описывающих поведение конструкций типа оболочек сложного внутреннего строения.

Представляется очевидным, что традиционные методы, основанные на последовательном упрощении уравнений пространственной теории упругости, здесь не эффективны, в частности, из-за их сложности. Чтобы выбрать подходящий метод, нужно обратиться к

анализу уже существующих вариантов теории оболочек, поскольку они уже доказали свою плодотворность. Причем полезно проследить не процедуру построения этих вариантов, а их конечные уравнения. Тогда можно заметить, что многим из них присущи две определяющие особенности: 1) они описываются в терминах двумерного многообразия и 2) они опираются на понятия усилий и моментов, но игнорируют все сверхстатические факторы. Разумеется, существуют и необходимые более сложные мультиполярные (полимоментные) теории, но в данной работе они не рассматриваются. Отмеченные две особенности положены в основу излагаемого ниже подхода.

*Примем **определение**: простой оболочкой называется двумерная деформируемая среда, напряженное состояние в которой полностью определяется заданием двух силовых тензоров: тензора усилий и тензора моментов.*

Таким образом, в рассмотрение введен новый (по форме, но не по существу) объект, названный простой оболочкой. Новым он является потому, что под него подпадают совершенно различные объекты: однослойные, многослойные, ребристые, мягкие, сетчатые и другие оболочки, а также биологические мембраны и сходные с ними объекты. Попадают под определение простой оболочки и многие конструкции, для которых еще не разработаны соответствующие теории. Название “простая оболочка” принято по аналогии с простыми материалами в механике сплошной среды. Как будет показано в работе, в теории простых оболочек тензоры усилий и моментов являются функционалами только от первых градиентов деформации.

Принятое определение однозначно для кинематической модели простой оболочки: *каждое тело–точка рассматриваемой двумерной среды является абсолютно твердым телом и имеет шесть степеней свободы.* Заметим, что было бы ошибкой считать, что принятие данной кинематической модели эквивалентно принятию гипотез типа “прямой неизменяемой нормали” или других гипотез кинематического типа.

Чтобы превратить абстрактную деформируемую среду в удобный инструмент инженерного анализа, нужно наделить ее соответствующими свойствами. Прежде всего, ей необходимо приписать массу и способность сопротивляться деформированию. Далее нужно сформулировать некие законы, управляющие поведением простых оболочек.

Примем, что для простой оболочки справедливы следующие принципы.

1. Принцип затвердевания (*принцип локальности, или принцип освобождения от связей*):

произвольно выделенная часть простой оболочки не изменит своего состояния, если воздействие отброшенной части заменить соответствующим распределением усилий и моментов, действующих по границе выделенной части.

2. Первый закон динамики Эйлера:

скорость изменения количества движения произвольно выделенной части простой оболочки равна главному вектору сил, действующих на эту часть.

3. Второй закон динамики Эйлера:

скорость изменения кинетического момента (момента количества движения) произвольно выделенной части простой оболочки равна главному моменту сил и моментов, действующих на эту часть.

4. Первый закон термодинамики (*уравнения баланса энергии*):

скорость изменения полной энергии произвольно выделенной части простой оболочки равна мощности сил и моментов, действующих на эту часть, плюс скорость подвода энергии немеханического происхождения (обычно в форме тепла).

5. Второй закон термодинамики:

вся механическая работа может быть переведена в тепловую энергию, но всю тепло-

вую энергию перевести в механическую работу невозможно.

В принципе, сформулированных аксиом достаточно, чтобы построить замкнутую теорию простых оболочек при надлежащем выборе уравнений состояния. Однако техническая реализация этого построения наталкивается на ряд затруднений, преодоление которых и составляет основное содержание теории.

Разумеется, приемлемость сформулированных законов к абстрактной двумерной среде можно оспорить. В этой связи отметим только, что во всех известных вариантах теории оболочек эти законы справедливы. Известно, что собственно построение той или иной теории не является достаточным обоснованием ее целесообразности. Нужно еще доказать, что в пределах своей применимости она, с одной стороны, не уступает своим предшественницам, а с другой стороны, позволяет рассмотреть некоторые новые задачи.

Глава 1.

Краткий исторический обзор

В данной главе предполагается рассмотрение истории становления основных принципов, используемых в работе, и некоторых представлений о современном состоянии теории оболочек.

Считается, что литературный обзор в работе заменяется сравнительно полным библиографическим списком. Кроме того, о многих современных работах можно получить представление непосредственно из основного текста работы. Коротко о структуре обзора. Сначала описывается становление основных принципов теории сопротивления материалов деформированию (до начала XX в.). Затем речь идет только о теории оболочек.

1.1. Ранний период становления механики сплошной среды

Принято считать, что теория сопротивления твердых тел деформированию основана Галилео Галилеем (1564–1642) в его последнем трактате “Беседы о двух новых науках” (1638). “Беседы” изложены в виде диалогов и разделены на шесть дней. Первые два дня посвящены сцеплению частиц в твердых телах, сопротивлению и разрушению при изгибе и растяжении упругих балок, а также звуковым колебаниям. Здесь формулируются: а) задача о разрушении упругой призмы при изгибе; б) задача о разрушении цилиндрического бруса при продольном разрыве. Первая задача стала отправной для более чем столетнего цикла работ. При рассмотрении второй задачи в рассуждениях Сальвиати (Галилея) неявно присутствуют два фундаментальных понятия: а) принцип затвердевания; б) понятие о напряжении. До Галилея считалось, что сила, необходимая для разрыва каната, зависит только от длины каната. Чем длиннее канат — тем меньше сила разрыва. Теперь известно, что из-за наличия дефектов это действительно верно, но в идеальном канате это не так. Требовалась поразительная прозорливость, чтобы, вопреки экспериментальным фактам, утверждать, что сила, необходимая для разрыва каната, пропорциональна площади сечения каната и не зависит от его длины.

Принцип затвердевания для теории твердых деформируемых тел в явной форме был сформулирован Гастоном Пардисом (1636–1673) в 1673 г. Он относится к гибким нитям (подвесным мостам, цепным линиям и т.д.) и утверждает, что форма любой выделенной части нити не изменится, если отброшенную часть нити заменить подходящими силами, приложенными к концам выделенной части нити и направленными вдоль касательных к нити в концевых точках. Именно в такой форме принцип затвердевания был использован Якобом Бернулли (1654–1705) в его исследованиях по гибким нитям. В 1691 г. Я. Бернулли выводит уравнения равновесия гибких нитей при действии произвольной распределенной

нагрузки:

$$T \frac{dx}{ds} = T_0 - \int_0^s F_x ds; \quad T \frac{dy}{ds} = - \int_0^s F_y ds, \quad (1.1)$$

где T — продольное усилие; F_x, F_y — внешние погонные усилия; s — длина нити.

Даже в XX веке ничего нельзя добавить к этим уравнениям. В 1660 г. Роберт Гук (1635–1703) открыл (опубликовал в 1676 г.) свой закон упругости. В 1680 г. этот закон был независимо установлен Э. Мариоттом (1620–1684), который применил его к исследованию задачи Г. Галилея об изгибе призмы. В отличие от Галилея, считавшего, что поперечное сечение призмы поворачивается вокруг своего нижнего основания, Мариотт правильно расположил ось вращения, но допустил ошибку при вычислении момента сопротивления. В 1694 году Я. Бернулли также обратился к решению задачи Галилея и при этом получил следующее уравнение:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ_y}; \quad \left(\frac{1}{R} = - \frac{d^2 w}{ds^2} \right), \quad (1.2)$$

где обозначения вполне современные и не нуждаются в пояснениях. Это соотношение принято считать формулой изгиба Бернулли–Эйлера, хотя оно было получено до рождения Л. Эйлера, который, правда, широко использовал его в своих трудах по колебаниям и устойчивости балок.

При выводе (1.2) Я. Бернулли использовал закон Гука и, кроме того, две гипотезы: “1) сечения, плоские и перпендикулярные к ребрам призмы до ее изгиба, остаются и после изгиба также плоскими и нормальными к этим ребрам и волокнам или продольным элементам, которые становятся криволинейными; 2) волокна, одни растянутые, другие укороченные, сопротивляются независимо, как будто бы они представляли собой малые изолированные призмы, не оказывающие друг на друга никакого действия”. Здесь приведена формулировка этих гипотез в трактовке Б. де-Сен-Венана [178], который считал их ошибочными¹.

Уравнение (1.2) сохраняет свое значение и в наши дни, хотя его уже и не называют более уравнением изгиба. Дело в том, что (1.2) возможно трактовать двояко. Во-первых, можно считать, что момент M в нем задан, тогда по (1.2) можно найти прогиб балки. Так и поступали Я. Бернулли, Л. Эйлер и другие. Именно в этом смысле (1.2) и называют уравнением изгиба. Во-вторых, уравнение (1.2) можно трактовать как определяющее соотношение (аналог закона Гука). Такова современная точка зрения.

Я. Бернулли отчетливо сознавал недостаточность уравнения (1.2) для создания полной теории изгиба балки и до конца своей жизни не прекращал попыток вывести уравнения равновесия балки при действии поперечной нагрузки. Причем, эти уравнения должны были бы быть вполне аналогичными уравнения (1.1), т. е. не зависящими от свойств материала балки. Для этой цели Я. Бернулли использовал остроумную модель изгиба балки, сводящую изгиб к продольному растяжению пружины. Попытки Я. Бернулли были неудачны. Причина неудач была установлена значительно позднее Л. Эйлером. Учеником Я. Бернулли был его младший брат Иоганн Бернулли (1667–1748), внесший большой вклад в математику и механику. Однако по интересующему нас вопросу заслуга И. Бернулли была в том, что он воспитал двух великих учеников: своего сына Даниила Бернулли

¹В мемуаре [178] Сен-Венан дает формулировку гипотез Я. Бернулли и далее излагает их критику, которая, конечно, является правильной, но только с уровня знаний XIX века. С позиций конца XVII века гипотеза Я. Бернулли вовсе не является гипотезой. Это теоремы, которые легко доказываются при отсутствии напряжений сдвига. Последние еще не были открыты. Поэтому критику “гипотез” Я. Бернулли, по нашему мнению, следовало излагать не как ошибку Я. Бернулли, а как-то иначе. К сожалению, трактовка Сен-Венана попала во многие руководства по теории упругости.

(1700–1784) и Л. Эйлера (1707–1783). В мемуаре [205], изданном в 1744 году, Л. Эйлер рассматривал балку, как материальную линию, имеющую бесконечно малое поперечное сечение (здесь же он обобщил уравнение Бернулли (1.2) на плоский первоначально изогнутый стержень)

$$M = D \left(\frac{1}{R_*(s)} - \frac{1}{R(s)} \right) = -D \left[\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2(s)} + v \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R(s)} \right) \right], \quad (1.3)$$

где $R(s)$ и $R_*(s)$ — радиусы кривизны стержня до и после деформации; $w(s)$ и $v(s)$ — нормальный и тангенциальный прогибы. При этом он считал возможным применять к этой линии все известные законы механики. В этой же работе на с. 492–498 Л. Эйлер рассматривает вопрос “Определение абсолютной упругости посредством опытов”. Абсолютной упругостью Л. Эйлер называет жесткость балки на изгиб. Хотя при написании функционала Л. Эйлер считает балку именно линией, в этом пункте он полагает, что поперечное сечение балки имеет конечные размеры и устанавливает зависимость жесткости на изгиб от природы материала (модуля упругости Юнга) и размеров поперечного сечения. Конечный результат Л. Эйлера оказался ошибочным: он повторил ошибку Галилея. Для нас интересен именно способ рассуждений Л. Эйлера, а не конечный результат. Л. Эйлер продолжил труды Я. Бернулли по выводу уравнений равновесия при изгибе балок. При этом ему пришлось сделать два открытия. Первое: необходимость введения перерезывающих усилий (касательных напряжений). Второе: установление независимости уравнений баланса сил и моментов. Именно этих фундаментальных открытий и недоставало Я. Бернулли для вывода уравнений изгиба балки. Строго говоря, понятие напряжений сдвига впервые было введено А. Параном (1666–1716) в 1713 г., но его работа осталась незамеченной и, очевидно, неизвестной Л. Эйлеру, ибо он нигде на нее не ссылается. Здесь следует указать, что Л. Эйлер был первым, кто ввел в употребление ссылки на достижения предшественников. До него такие ссылки носили только негативно – критический характер. Честь второго открытия, одного из самых ярких в творчестве гениального ученого, целиком принадлежит ему. В современных терминах, впрочем, мало отличающихся от использованных Л. Эйлером, эйлеровы законы динамики сформулированы во введении к данной работе. Применительно к системам взаимодействующих материальных точек эти законы могут быть выведены из законов Ньютона, но Эйлер принимает их как независимые постулаты, применимые к любой механической системе. (Это обстоятельство чрезвычайно важно для данной работы). Используя эти законы, Эйлер приходит в 1771 г. к уравнениям равновесия плоского изогнутого стержня

$$\frac{dT}{ds} + \frac{N}{R(s)} + F_1 = 0, \quad \frac{dN}{ds} - \frac{T}{R(s)} + F_n = 0, \quad \frac{dM}{ds} - N = 0, \quad (1.4)$$

где T , N — растягивающее и пререзывающее усилия; M — изгибающий момент. Кроме уравнений (1.4) Л. Эйлер предложил обобщение третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия. В современной записи оно выглядит так:

$$\mathbf{T}_{(v)} + \mathbf{T}_{(-v)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_{(v)} = v \mathbf{T} + n \mathbf{N}, \quad (1.5)$$

где v и n — векторы единичных касательной и нормали к материальной линии; причем $\mathbf{T}_{(v)}$ характеризует воздействие в данном сечении части стержня, находящегося со стороны положительного направления касательной v на оставшуюся часть стержня. Аналогичное (1.5) равенство имеет место и для момента M .

Уравнения (1.4) и (1.5) сохранились неизменными до наших дней.

Итоги по теории стержней подвел Шарль Кулон (1736–1806) в своей небольшой работе, выпущенной в 1773 г. Ш. Кулон исправил ошибки своих предшественников и дал правильную формулу для момента сопротивления. Конец XVIII века отмечен двумя, ставшими известными попытками подойти к проблеме построения теории оболочек на основе принципов, использованных в теории стержней. Первая попытка была предпринята Л. Эйлером в 1776 г., когда он предложил рассматривать колокол как совокупность колец, каждое из которых ведет себя как плоский кривой брус. Вторая попытка была совершена Якобом Бернулли–младшим (1759–1789) — сыном Иоганна-П. Бернулли (1710–1790). Он рассматривал (1789) оболочку “как двойной слой кривых брусьев, причем брусья одной системы пересекаются с брусьями другой системы под прямым углом” [137]. Конечные уравнения, как выяснилось впоследствии, оказались неверными (не было учтено закручивание брусьев).

В 1788 г. выходит первое издание “Аналитической механики” Жозефа-Луи Лагранжа (1736–1813), второе (посмертное) издание вышло, видимо, в 1814 г. Фундаментальным вкладом Ж. Лагранжа в механику является формулировка и систематическое применение принципа возможных перемещений, хотя его частные формулировки появились задолго до Лагранжа. На основе высказанного принципа Лагранж рассматривает и сплошные среды. В частности, в “АМ” впервые выведено уравнение равновесия мембраны. При рассмотрении движения жидкости Ж. Лагранж привел формулировку и дал истолкование линейному тензору деформации

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (1.6)$$

Обычно эту формулу, как указали Л.Г. Лойцянский и А.И. Лурье, приписывают О. Коши, который получил ее в 1822 г.²

Парижская Академия Наук объявила проблему тонких пластинок темой конкурса 1811 г. В Представленной на конкурс работе Софи Жермен (1776–1831) используется функционал, аналогичный предложенному Д. Бернулли в теории балок. Отличие заключено в замене кривизны стержня суммой главных кривизн изогнутой поверхности пластинки. Как теперь известно, это верно только для заземленной пластины, но на конечном уравнении не сказывается. С. Жермен при выводе уравнения пластины допустила ошибку, которую исправил Ж. Лагранж, рецензировавший ее работу. Уравнение равновесия Лагранжа–Жермен имеет вид

$$\Delta \Delta W = P/D. \quad (1.7)$$

Заканчивая этот параграф, приведем цитату из книги А. Лява [137]: “Результаты всех трудов и остроумия исследователей в области проблем упругости можно подытожить к концу 1820 г. следующим образом: несовершенная теория изгиба, ошибочная теория кручения, недоказанная теория колебаний стержней и пластинок и определения модулей Юнга”. Далее А. Ляв отмечает большую роль этих исследований в становлении теории упругости. Хотелось бы сформулировать эти итоги несколько иначе. А именно, к 1820 г. были твердо установлены: а) принцип затвердевания; б) Эйлеровы законы динамики с приложением к выводу уравнений равновесия стержней; в) понятие напряжений, особенно в гидромеханике; г) обобщен и многократно применен, в том числе и в сплошной среде, принцип возможных перемещений; д) закон упругости Гука–Мариотта и его приложения

²Томсон и Тэт [287] показали, что принцип возможных перемещений равносильен при игнорировании притоков энергии немеханического происхождения закону баланса энергии. В.Л. Кирпичев [117] показал, что из него при наложении требования инвариантности относительно группы жестких движений следуют Эйлеровы законы динамики. Поэтому трудно согласиться с К. Трусделлом [288], считающим описанный результат достижением механики второй половины текущего столетия.

к частным задачам; е) общая теория малых деформаций сплошной среды. К сказанному, конечно, следует добавить и те выводы, которые сформулированы А. Лявом вслед за приведенной выше цитатой.

1.2. Построение теории упругости и рождение теории оболочек

Начиная с 1821 г. развитие теории упругости и построение на ее основе различных прикладных теорий протекало весьма интенсивно. Исходя из корпускулярных представлений Луи Анри Навье (1785–1836) в 1821 г. предложил уравнения равновесия изотропных упругих тел:

$$\mu (\Delta \mathbf{u} + 2\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{K} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.8)$$

где μ — модуль сдвига.

В уравнение (1.8) входит только одна постоянная μ , поэтому его, строго говоря, нельзя признать уравнением равновесия упругих изотропных тел общего вида. В этом же году теория упругости привлекла внимание Огюстена Луи Коши (1789–1857). И уже к осени 1822 г. О. Коши вывел все основные уравнения теории упругости. Коши вводит в рассмотрение сплошную среду, напряженное состояние в которой определяется единственным силовым тензором. Далее Коши использует принцип затвердевания и Эйлера-вы законы динамики. В результате он впервые получает уравнения движения трехмерной деформируемой среды

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad (1.9)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений. Если здесь принять $\boldsymbol{\tau} = p \mathbf{I}$, то придем к эйлеровым уравнениям движения жидкости. Подчеркнем, что у Навье не было аналога уравнения (1.9), не зависящего от свойств материала. Уравнения (1.9) являются весьма общими и опираются всего на два допущения: а) тело является трехмерным многообразием и б) в каждой точке среды действует только один силовой тензор. Для него Коши устанавливает свойства

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau}_n + \boldsymbol{\tau}_{-n} = \mathbf{0}. \quad (1.10)$$

Тензор деформаций был введен Ж. Лагранжем. Коши постулирует линейную связь между тензорами напряжений и деформаций, т. е. дает обобщение закона упругости Гука – Мариотта:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \forall: \mathbf{d} = -\mathbf{d}^T, \quad (1.11)$$

где \mathbf{C} называется тензором упругости. В общем случае тензор \mathbf{C} имеет 36 независимых компонент, а для изотропного тела имеется всего два модуля упругости.

Все результаты по линейной теории упругости, сохранившие свое основополагающее значение, Коши получил менее чем за год. В течение последующих 15 лет Коши пытается улучшить построения Навье. Этому же посвящен ряд работ другого выдающегося математика Симеона Дени Пуассона (1781–1840). Как известно, эти усилия не увенчались успехом. На это следует обратить внимание при оценке достоинств и недостатков прямого подхода к построению моделей сплошных сред.

Существенное дополнение к теории упругости Эйлера–Коши было сделано одним из первых английских математиков Джорджем Грином (1793–1841) в работе “О законах отражения и преломления света на общей поверхности двух некристаллических сред” (1839).

В этом труде Дж. Грин подробно обсуждает попытки вывести уравнения теории упругости из корпускулярных представлений и далее говорит: “... более надежным методом представляется выбрать в качестве основы какой-нибудь общий физический принцип, а не исходить из определенного способа действия, который, в конце концов, может

значительно отличаться от того механизма, которым пользуется природа. ... Принцип, избранный в качестве основы рассуждений в этой работе, таков: каким бы образом ни действовали друг на друга элементы любой материальной системы, если все действующие внутренние силы помножить на элементы их соответствующих направлений, общая сумма для любой определенной части тела всегда будет полным дифференциалом некоторой функции.” Цитируется по книге [167]. Математическое выражение сказанного Грином имеет вид

$$dU = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.12)$$

где U — энергия деформации. Отсюда следуют формулы Грина

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{dU}{d\boldsymbol{\epsilon}} \Rightarrow \mathbf{C} = \frac{d^2U}{d\boldsymbol{\epsilon}d\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (1.13)$$

В этом случае число упругих постоянных можно сократить до 21. В.В. Новожилов показал, что существенны только 13 компонент [158]. Формулы (1.9)–(1.13) составляют основу современной линейной теории упругости. Подчеркнем, что все эти уравнения были получены из общих законов механики, примененных к абстрактной сплошной среде, а попытки учесть действительное строение вещества оказались незавершенными. Последняя задача не полностью решена и в настоящее время.

После создания теории упругости Эйлера–Коши–Грина наступила новая эпоха в разработке прикладных теорий стержней, пластин и оболочек. Причем эти теории стали выводиться как логические следствия из теории упругости. Первыми к выводу уравнений теории пластин из уравнений теории упругости обратились Коши (1828) и Пуассон (1829). Они использовали разложения по степеням толщинной координаты и ограничились только низшими членами. Метод Коши–Пуассона подвергся критике со стороны Б. де Сен-Венана (1797–1886). критика Сен-Венана изложена в примечаниях к французскому переводу книги А. Клебша “Теория упругости” (1883) и в основном представляет собой сомнения относительно сходимости используемых разложений. Несмотря на отсутствие строгих доказательств, метод Коши–Пуассона широко используется и в настоящее время.

В 1850 году вышла первая работа Густава Роберта Кирхгофа (1824–1887) по теории пластин. В этой работе впервые рассмотрены гипотезы Кирхгофа и получено уравнение Лагранжа–Жермен вместе с двумя краевыми условиями (вместо трех у Пуассона). В 1859 г. выходит работа Г. Кирхгофа по теории стержней, в которой использован совершенно необычный по тем временам метод.

Описание этого метода можно найти в книге Кирхгофа “Механика” [118]. Ученик Кирхгофа Ф. Геринг распространил этот метод на теорию пластин. В улучшенном виде метод Кирхгофа изложен в лекциях 28–30 книги “Механика” (1876). Хотя конечные уравнения теории пластин в последней версии Кирхгофа совпадают с его первоначальной версией, следует подчеркнуть и большое различие. Если в первой работе гипотезы Кирхгофа принимались априорно, то в последней версии “гипотезы” Кирхгофа являются следствием сочетания двух вполне строгих методов: метода “внутренних уравнений” (позволяющего оценить асимптотические порядки всех напряжений) и кинематических соотношений Кирхгофа. В то время как метод “внутренних уравнений” сохранился в неизменном виде до сих пор, кинематические соотношения вышли из употребления, что, вероятно, объясняется сугубо историческими причинами. Рассматривая растяжение толщинной координаты $z = h z'$ ($-1/2 \leq z' \leq 1/2$), Кирхгоф вводит в уравнения равновесия и кинематические уравнения малый параметр. После чего находит асимптотические порядки всех переменных в главных членах. Далее из кинематических уравнений неразрывности находят аппроксимации для перемещений по толщинной координате. Найденные аппроксимации

подставляются в функционал энергии, и производится осреднение по толщинной координате. Результатом является двумерный функционал, из которого следует как уравнение изгиба пластин, так и два краевых условия (вместо трех у Пуассона). Метод Кирхгофа был с энтузиазмом воспринят современниками и широко применялся. Его использовал А. Клебш в своей “Теории упругости” (1862). В этой книге впервые были введены в рассмотрение усилия и моменты вместо напряжений. Однако уравнения Клебша подверглись критике А. Лява. На основании метода Кирхгофа Клебш правильно устанавливает, что в главном члене перерезывающие усилия обращаются в нуль (асимптотически малы по сравнению с растягивающими усилиями), и он их отбрасывает. Ляв обратил внимание на то, что малость перерезывающих усилий не позволяет их отбросить, поскольку они входят в уравнения моментов, которые также являются малыми.

Первая попытка вывода уравнения теории оболочек из уравнений теории упругости была предпринята Г. Ароном (1874). Он использовал метод Кирхгофа и получил весьма сложные уравнения, но выражение для энергии у него оказалось тем же, что и в теории пластин Кирхгофа. Различие состояло в энергии изгиба: вместо кривизн деформированной пластины, стояли разности кривизн поверхности до и после деформации. Однако при вычислении кривизн Арон допустил неточности. Рождение современной теории, видимо, следует связывать с работами А. Лява (1888), А. Бэссета (1892) и Х. Лэмба (1890). В целом, результаты Лэмба и Бэссета подтвердили теорию А. Лява. Следует указать, что в работе А. Лява (1888) использовался метод Кирхгофа–Геринга без обращения к гипотезам Кирхгофа. В расширенном виде, учитывающем критику Бэссета и Лэмба, работа Лява изложена в первом издании второго тома “Математической теории упругости” (1893) [258]. В 1903 г. вышла “Натуральная философия” Томсона и Тэта. Благодаря удачному изложению материала, эта книга оказала большое влияние на всю механику. В частности, теория Кирхгофа излагается следующим образом. Сначала формулируются “гипотезы” Кирхгофа, и строится вся теория пластин. Только после этого упомянутые “гипотезы” доказываются методом Кирхгофа. Также поступил и Ляв во втором издании “Математической теории упругости” (1906), но для краткости он опустил метод Кирхгофа доказательства гипотез. Именно это изложение и известно нашим читателям по книге [137]. Следует указать, что в первом издании содержится значительно большее количество вариантов соотношений упругости.

Дальнейшее развитие теории оболочек пошло по двум существенно различным направлениям. Первое, называемое далее классическим, продолжило исследования по выводу уравнений теории оболочек из уравнений пространственной теории упругости. Второе направление связано с прямым подходом к построению теории оболочек. Суть его в моделировании оболочки деформируемой поверхностью и последующем изучении механики таких поверхностей.

1.3. Развитие классической теории оболочек

Теория Лява (1906) завоевала большую популярность и широко использовалась в практических расчетах. Однако ей были присущи некоторые недостатки: неясная область применимости, “непоследовательное обращение с малыми членами” (В.В. Новожилов [159]), использование необязательного ограничения $\epsilon \sim h^2$, нарушение шестого уравнения равновесия (в малых членах) и др.

Поэтому в XX в. продолжались интенсивные исследования по основаниям теории оболочек. Еще больший размах приобрели исследования по разработке эффективных методов решения краевых задач теории оболочек. Рассмотрение этих методов выходит за

рамки данного обзора, поэтому ограничимся только несколькими фразами. Практически все основные достижения в этой области были получены отечественными учеными. При этом пришлось решать принципиальный спор о структуре искомых методов. В ранних работах зарубежных исследователей основное внимание уделялось построению точных решений краевых задач теории оболочек, что находилось в очевидном противоречии с приближенным характером исходных уравнений. Видимо, первым на это обстоятельство указал И.Я. Штаерман (1924), который и ввел в употребление асимптотические методы. Последовательно эта точка зрения проводится в книге А.И. Лурье [131] при построении решений, а в работе В.В. Новожилова [159] при комплексном преобразовании уравнений теории оболочек. Асимптотические методы интегрирования уравнений теории оболочек получили детальное развитие в работах А.Л. Гольдейнвейзера (начиная с 1939 г.). Сочетание комплексного преобразования В.В. Новожилова с асимптотическими методами представлено в работах К.Ф. Черныха. Другая точка зрения, основанная на интуитивно-физических представлениях, плодотворно использовалась в работах В.З. Власова [38].

Наиболее значительный вклад в развитие теории оболочек внесли: С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, И.Н. Векуа, В.З. Власов, И.И. Ворович, И.Г. Галеркин, К.З. Галимов, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, Н.А. Кильчевский, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, В.В. Новожилов, П.М. Огибалов, Ю.Н. Работнов, В.В. Соколовский, С.П. Тимошенко, К.Ф. Черных, И.Я. Штаерман, П.М. Нахди, Э. Рейсснер и другие видные исследователи.

Продолжая обсуждение проблемы вывода основных уравнений, из всего множества исследований выделим только несколько работ, наиболее полно, по нашему мнению, отражающих прогресс в теории оболочек. В 1940 г. вышла работа А.И. Лурье [129], в которой дано тензорное изложение основных уравнений теории оболочек, опирающейся на гипотезы Кирхгофа–Лява. В этой работе устранены все недостатки теории Лява, за исключением остающейся неясности области применимости³.

Строго говоря, соотношения А.И. Лурье не содержат малых членов, которые можно было бы отбросить без потери общности. Важным для теории оболочек оказался 1943 г., когда появились работы А.И. Лурье [130], В.В. Новожилова [154] и В.В. Новожилова, Р.М. Финкельштена [155], посвященные погрешности гипотез Кирхгофа–Лява. А.И. Лурье показал, что в главных членах результаты, даваемые теорией оболочек и теорией упругости, совпадают, а в членах порядка $O(h)$ имеется существенное расхождение. В работе [155] показано, что в соотношениях А.И. Лурье утеряны слагаемые того порядка малости, что и оставленные. Кроме того, было показано, что во многих случаях приемлемо ограничение $\epsilon \sim hx$. В этих случаях соотношения А.И. Лурье уже содержат малые слагаемые, выходящие за пределы точности исходных гипотез. В.В. Новожиловым была поставлена и решена задача о формулировке простейшей теории оболочек, в которой выполнено шестое уравнение равновесия. Эта же задача независимо была решена Л.И. Балабухом [20], но известной стала именно теория В.В. Новожилова, поскольку в ней не только сформулированы простейшие соотношения упругости, но и дано их систематическое использование. Впоследствии обнаружилось, что не существует тензорных уравнений, которые совпадали бы с соотношениями В.В. Новожилова без нарушения одного из свойств: а) непрерывной зависимости от радиусов кривизны или б) сохранения “изотропности” (скажем, в линиях кривизны записаны соотношения для оболочки из изотропного материала, тогда и в

³Недавно в ДАН СССР появилась работа, авторы которой “опровергают” классическую теорию оболочек, представленную теорией Лява, на примере бесконечно длинной цилиндрической оболочки с шарнирным опиранием вдоль образующей. Данное “опровержение” является, конечно, недоразумением. Авторы забыли об ограничении $\epsilon \sim hx$, явно сформулированном Лявом. Если бы они взяли уравнения Лява, не говоря уже о теории А.И. Лурье [129], то никакого уточнения в главных членах они не получили бы. О неприменимости теории Лява при решении задачи для кольца (или бесконечно-длинной цилиндрической оболочки) прямо указывал А.И. Лурье [131]

любой другой системе координат эти соотношения должны соответствовать оболочке из изотропного материала). Речь идет не просто о тензорной записи соотношений В.В. Новожилова, что, конечно, всегда возможно, а о более сложной операции. Последняя была совершена в книге К.Ф. Черных [198], с. 101, уравнение (6.6). Несколько ранее (если судить по году публикации) эта же задача была решена в работах Дж. Сандерса [282] и У. Койтера [247]. В литературе эти соотношения стали известны под наименованием теории Койтера–Сандерса, что представляется довольно спорным. Дело в том, что в работах [198], [247], [282], по-существу, в тензорном виде повторяются все рассуждения В.В. Новожилова. Кроме того, в книге [198] показано, что различие в соотношениях Новожилова и Койтера–Сандерса содержится в членах, выходящих за пределы точности исходных допущений, а области применимости у них одинаковы.

Завершающий, по нашему мнению, шаг в построении теории типа Лява был совершен А.Л. Гольденвейзером. На основании асимптотического анализа уравнений теории упругости А.Л. Гольденвейзер дал другую формулировку кинематических и статических “гипотез”, отличную от гипотез Кирхгофа–Лява. Он получил новые соотношения упругости, которые отличаются от соотношений А.И. Лурье учетом поперечной сжимаемости оболочки. Это и были те слагаемые, на потерю которых указывалось в работе [155].

Мы хотели дать только некоторое представление о современном состоянии теории оболочек типа Лява.

1.4. О прямых подходах к построению теории оболочек

Прямыми условимся называть подходы, основанные на применении законов механики к абстрактной сплошной среде. Примеры использования прямых подходов: теория Бернулли гибких нитей, теория стержней Эйлера, теория упругости Коши–Грина, теория изгиба пластин Лагранжа–Жермен. При прямых подходах вопросы обоснования получаемых уравнений остаются в стороне и должны решаться отдельно, что является весьма сложной проблемой. Например, классическая теория упругости обоснована только экспериментально; область ее применимости очерчена, по-существу, только на интуитивном уровне. В то же время теория стержней и классическая теория оболочек типа Лява обоснованы с позиций трехмерной теории упругости. Конечно, было бы хорошо, если бы все варианты теории оболочек, необходимые для прикладных целей, можно было бы вывести из трехмерной теории упругости. Но это невозможно по двум основным причинам. Первая: многие полезные прикладные теории оболочек, видимо, нельзя обосновать из-за отсутствия критериев достоверности; некоторые характеристики таких теорий приближенно совпадают с трехмерными, другие же характеристики даже качественно не совпадают с трехмерными. Вторая: во многих случаях, исследуемых с позиций теории оболочек, трехмерная теория вообще отсутствует. Такова, например, теория мягких (из тканей) оболочек или теория биологических мембран [110]. К этому же классу оболочек относятся случаи, когда поверхностная энергия становится сравнимой с объемной энергией (разного рода пленки, включая пьезоэлектрические пленки).

После создания теории упругости первой работой, в которой рассматривались теории стержней, пластин и оболочек и трехмерные сплошные среды с позиций прямого подхода, была книга Е. и Ф. Коссера (1909). Долгое время подход Коссера выпадал из поля зрения исследователей. Однако, начиная с работы К. Трусделла и Дж. Эриксона (1958), этот подход начал интенсивно развиваться, главным образом, в работах зарубежных исследователей. В России подобные работы не проводились, и, по мнению автора, это не очень хорошо. Дело даже не в полезности той или иной теории — заранее это предска-

зять невозможно. Просто отечественная наука не может позволить себе сильного отставания в какой-бы то ни было области. Мы не будем описывать всех достижений Коссера и их последователей, хотя здесь и получены важные результаты, поскольку этот подход в данной работе не используется. Опишем коротко только основную идею. Коссера вводят в рассмотрение упругий континуум, каждая тело – точка которого может испытывать смещения и независимые повороты. Упругий континуум может быть одномерным (стержни), двумерным (оболочки) или трехмерным (континуум Коссера). Далее рассматривается функционал евклидова действия (действия по Гамильтону), который определен на множестве векторов смещений и поворотов. Основные уравнения выводятся из условий стационарности этого функционала. С теоретической точки зрения подход Коссера, хотя и ограничен, но логически безупречен. В конце шестидесятых годов XX в. автор данной работы находился под сильным влиянием этой теории, старательно ее изучал и все же, в конце концов, отказался от нее. Причина была в том, что эту теорию на самом деле очень непросто использовать в прикладных целях. Конечно, когда ответ заранее известен, то нетрудно подобрать соответствующий функционал, но этого недостаточно. Имеются и другие трудности. В теории Коссера “усилия” и “моменты” определяются как производные от лагранжиана и оказываются отличными от настоящих усилий и моментов, с которыми привык иметь дело инженер – расчетчик. Далее, вариационная постановка имеет много достоинств, но имеет и недостатки, связанные с использованием энергии. Конечно, в теоретическом отношении здесь нет никаких проблем, однако в прикладном плане эти проблемы весьма существенны. Дело в том, что функционал энергии крайне критичен к скрытым неконсервативностям, неучтенным потерям энергии и т. д.

Приведем одну школьную задачу: на абсолютно гладкой поверхности лежит свернутая в “комочек” цепь с погонной плотностью ρ ; затем конец этой цепи начинают вытягивать с постоянной скоростью v так, что все большая часть цепи приходит в движение (“комочек” остается неподвижным); спрашивается, какая сила должна быть приложена к концу цепи?

Решение I: Первый закон динамики Эйлера

$$\frac{d mv}{dt} = F, \quad m(t) = \rho s(t), \quad \frac{ds}{dt} = v \quad \Rightarrow \quad F = \rho v^2,$$

где $s(t)$ — длина вытянутой части цепи.

Решение II: Уравнение баланса энергии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = Fv \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Для силы F получили разные ответы. Правильный ответ дает первый закон динамики. При втором же подходе надо искать скрытые утечки энергии. Конечно, они всегда находятся, но не всегда ясно, что их надо искать. Автор мог бы назвать и современные работы по теории пластин, где допущены ошибки аналогичного типа.

Обратимся к теории оболочек и рассмотрим энергетический (вариационный) подход. Часто поступают так. Берут энергию трехмерного тела. Затем ее осредняют тем или иным способом и получают двумерный функционал энергии; последняя приписывается оболочке. Верно ли это? Нет, не верно⁴, ибо трехмерная энергия учитывает энергию тех движений частиц оболочки, трехмерного тела, которые никак не сказываются на движении собственно двумерной оболочки. В то же время законы динамики Эйлера совершенно не чувствительны к подобного рода обстоятельствам. Вспомним, что уравнения движения

⁴Это будет верно [60] только в том случае, когда допустимо использовать гипотезы Кирхгофа–Лява.

оболочки могут быть получены из трехмерных уравнений движений посредством вполне точных операций осреднения.

Сказанное ни в коем случае нельзя воспринимать как критику подхода Коссера. По мнению автора, работа Коссера внесла выдающийся вклад в механику деформируемой среды, и ее полезность уже доказана в многочисленных научных трудах. Просто ее приложимость к техническим задачам требует известной осторожности, а у инженера зачастую не времени для обдумывания всех аспектов задачи: он выделяет главное и работает только с ним. Следовательно, нужны гарантии, доставляемые законами динамики Эйлера.

В целом, подход Коссера означает радикальный отход от генеральной линии Бернулли–Эйлера–Коши. В данной работе автор предпочел вернуться к этой линии, а именно ввести в рассмотрение абстрактный двумерный континуум, наделить его подходящими свойствами и применить к нему основные законы механики. Аналогичный подход в более ограниченной постановке используется в последних работах Э. Рейсснера, где рассматривается только статика и, по существу, не затрагивается решение основной проблемы — формулировки соотношений упругости.

Ознакомиться с развитием теории Коссера можно по работам, содержащимся в библиографическом списке, и по обзору П.М. Нахди [269].

1.5. Неклассические теории оболочек

Под неклассическими понимают прежде всего теории оболочек типа Тимошенко, т. е. учитывающие деформации поперечного сдвига. С этими теориями можно ознакомиться по обзору Э.И. Григолюка и И.Т. Селезова [67]. Кроме того, к неклассическим можно отнести теории ребристых оболочек (обзор содержится в [15]), многослойных оболочек (обзоры [9], [30], [65], [67], [125]); сетчатые оболочки (обзор в книге Г.И. Пшеничнова); биологические мембраны [110] и т. д.

Коротко остановимся на ребристых и многослойных оболочках. Первые работы в этой области выполнены И.Г. Бубновым (подкрепленные пластины) и Ю.А. Шиманским (цилиндрическая оболочка со шпангоутами). Теория ребристых оболочек общего вида представлена в работах А.И. Лурье (1948) и В.З. Власова (1949). А.И. Лурье (1948) рассматривал ребра как стержни Кирхгофа–Клебша, а В.З. Власов — как тонкостенные стержни В.З. Власова. В дальнейшем развитие этой теории содержалось в работах С.А. Амбарцумяна, Е.С. Гребня, В.А. Заруцкого, Г.А. Кизима, Н.П. Флейшмана и многих других.

Многослойные оболочки исследовались с разных точек зрения во многих работах в основном в двух основных направлениях. К первому относятся теории, основанные на принятии кинематических гипотез для всего пакета слоев. Уже на начальном этапе исследования показали неприемлемость этого подхода, если свойства слоев резко различаются, поэтому в последние годы существенное развитие получили работы второго направления: кинематические гипотезы принимаются для каждого слоя в отдельности; порядок уравнений в этих теориях зависит от числа слоев. Недостатком работ второго направления является сложность и высокий порядок получаемых уравнений.

В данной работе показано, что при отказе от кинематических гипотез можно использовать и простейшие варианты теории оболочек.

Основной вклад в развитие теории многослойных оболочек внесли: А.Я. Александров, В.В. Болотин, Э.И. Григолюк, М.И. Гусейн-Заде, Л.М. Куршин, Х.М. Муштари, А.П. Прусаков, А.Л. Рабинович, П.П. Чулков и многие другие.

Глава 2.

Общая теория простых оболочек

2.1. Определение простой оболочки

Современная теория оболочек является обширным отделом механики твердого деформируемого тела, объединяющим ряд более или менее самостоятельных разделов, в которых изучаются отдельные классы оболочек: однослойные, многослойные, ребристые, сетчатые, мягкие и другие оболочки. Законченные очертания приобрела теория тонких однослойных упругих оболочек. Большие успехи достигнуты и в других разделах. В теории оболочек принято выделять два существенно различных типа [60]: теории типа Лява и теории типа Тимошенко.

Первые описываются уравнениями параболического типа в динамике и эллиптического типа восьмого порядка в статике. Теории типа Лява, очевидно, исчерпывают практические потребности в исследовании напряженно-деформированных состояний в тонких однослойных оболочках. Однако для других классов оболочек, таких, например, как многослойные с резко различными материалами слоев, теории типа Лява часто оказываются недостаточными. В этих случаях широкое применение находят теории типа Тимошенко, учитывающие деформацию поперечного сдвига и описываемые уравнениями гиперболического типа десятого порядка. В отличие от теории типа Лява теория типа Тимошенко не является универсальной в том смысле, что в ней, видимо, не существует однозначного пути для определения жесткости на поперечный сдвиг: различные задачи требуют различных значений коэффициента поперечного сдвига, так получается даже для однослойных оболочек постоянной толщины. Этот вопрос будет подробно обсужден в следующем разделе. Существуют и другие теории оболочек, их описание требует более сложных уравнений, порядок которых зависит либо от степени полиномиальных аппроксимаций для напряжений и перемещений по толщине оболочки, либо от числа слоев, составляющих оболочку. Такие теории в дальнейшем не будут обсуждаться. Если проанализировать теории типа Лява и типа Тимошенко, то легко усматриваются две определяющие особенности этих теорий:

- 1) их описание в терминах двумерного многообразия;
- 2) использование исключительно концепций усилий и моментов.

Именно эти две особенности и положены в основу определения простой оболочки. Все остальные элементы теории, по существу, вытекают из этих положений. Понятно, что существует много задач, в которых нельзя ограничиться только усилиями и моментами и нужно привлекать сверхстатические факторы. В этих случаях предлагаемая теория может стать бессодержательной, но она не должна приводить к противоречивым или абсурдным результатам. Это требование налагает весьма жесткие ограничения на выбор исходных посылок и методов построения теории.

В частности, нежелательными являются ограничения на изменяемость внешних нагрузок и использование аппроксимаций для напряжений и перемещений по толщине оболочки. В теории простых оболочек это оказывается достижимым.

Определение: оболочкой сложности N называется двумерная деформируемая среда, напряженной состояние в которой определяется заданием N силовых тензоров. При $N = 1$ оболочка называется мембраной, а единственный силовой тензор — тензором усилий. При $N = 2$ оболочка называется, за неимением лучшего термина, простой; первый силовой тензор называется тензором усилий, а второй — тензором моментов. При $N \geq 3$ оболочки называются мультиполярными (они не рассматриваются в данной работе).

Принятое определение простой оболочки является формальным, а сама простая оболочка — моделью, абстрагирующей две определяющие особенности нескольких разделов в теории оболочек. Поскольку в каждой точке двумерной среды действуют только усилия и моменты, то эта точка является абсолютно твердым телом. Точнее говоря, это тело-точка может деформироваться, но его деформации не могут влиять непосредственно на его энергию деформации. Для наглядности тело-точку удобно представлять именно абсолютно твердым телом. Помимо прочего, это позволяет существенно использовать многие положения динамики твердого тела.

В этом разделе будет построена формальная теория простых оболочек. Взаимоотношения этой теории с пространственной теорией упругости будут подробно рассмотрены в следующем разделе. В частности, будет показано, какие элементы теории простых оболочек имеют непосредственную связь с трехмерной теорией, а какие нет.

2.2. Обозначения векторных и тензорных величин

В этой работе будет использовано так называемое прямое тензорное исчисление, введенное в употребление Гиббсом. В настоящее время оно широко используется в механике.

Использование прямой тензорной записи существенно облегчает как построение самой теории, так и восприятие конечных результатов, однако требует простейших навыков. Следует помнить, что все векторы и тензоры в этой работе рассматриваются как объекты трехмерного пространства, заданные на некоторой поверхности, называемой несущей. Последнюю будем называть радиус-вектором $\mathbf{R}(x, t)$, где x означает точку поверхности, определяемую двумя материальными координатами $x^\alpha (\alpha = 1, 2)$, t — время.

Таким образом $\mathbf{R}(x, t)$ определяет положение несущей поверхности в данный момент времени t . В каждой точке несущей поверхности будет задаваться ряд объектов, которые могут быть скалярами, векторами или тензорами высших рангов. Последние будут подчеркиваться двумя чертами снизу, а их ранг оговариваться отдельно. В каждой точке поверхности можно ввести сколь угодно базисов. В этой работе будут использоваться в каждой точке два естественных базиса. Первый базис состоит из векторов $\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{N}$:

$$\mathbf{R}_\alpha(x, t) = \partial_\alpha \mathbf{R}(x, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{R}(x, t)}{\partial x^\alpha}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}_\alpha = 0. \quad (2.1)$$

Второй базис состоит из трех ортонормированных векторов

$$\mathbf{D}_k(x, t) \cdot \mathbf{D}_m(x, t) = \delta_{km}, \quad (k, m = 1, 2, 3). \quad (2.2)$$

Первый базис является общепринятым в теории поверхностей. Второй базис специфичен только для выбранной модели двумерной среды, каждая точка которой является абсолютно твердым телом. Векторы $\mathbf{D}_k(x, t)$ служат для определения ориентации тела — точки этой среды в пространстве. Конкретный выбор векторов $\mathbf{D}_k(x, t)$, вообще говоря,

безразличен, но в дальнейшем этот выбор будет подчинен некоторым условиям, облегчающим построения. Примем следующие соглашения:

1. Греческие индексы принимают значения 1, 2, а латинские — 1, 2, 3.

2. По повторяющимся дважды разновысоким индексам подразумевается суммирование.

3. Величины в данный момент времени обозначаются большими корневыми буквами, а их значение при $t = 0$ — малыми корневыми буквами:

Например, $\mathbf{r}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{x}, 0)$.

К сожалению, эти правила будут допускать исключения и довольно частые, которые придется оговаривать отдельно.

Помимо двух основных базисов будут использоваться еще два взаимных базиса таких, что

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}^\beta = \delta_{\alpha\beta}^{\alpha}, \quad \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{D}_m = \delta_m^k. \quad (2.3)$$

Новым здесь является только базис $\mathbf{R}^\alpha, \mathbf{N}$, в то время как \mathbf{D}^k , в силу (2.2) совпадает с \mathbf{D}_k . Ниже будут использоваться эти четыре базиса для представления всех встречающихся векторов и тензоров. Например, тензор усилий будет иметь вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{T}^\alpha, \quad \mathbf{T}^\alpha \equiv \sqrt{\mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}^\alpha} \mathbf{T}_{(\alpha)},$$

где $\mathbf{T}_{(\alpha)}$ — физический вектор усилия, действующий по линии $\mathbf{x}^\alpha = \text{const}$.

Тензор \mathbf{T} — несимметричный тензор второго ранга третьей размерности, но он обладает таким свойством, что

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0,$$

т. е. \mathbf{N} — левый собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению. Поэтому тензор \mathbf{T} — вырожденный: $\det \mathbf{T} = 0$. В то же время “векторы” \mathbf{T}^α удобно представлять в базисе \mathbf{D}_k :

$$\mathbf{T}^\alpha = T^{\alpha k} \mathbf{D}_k.$$

Такое представление обусловлено следующим обстоятельством. Во многих случаях векторы $\mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t)$ удобно выбирать так, чтобы $\mathbf{d}_3(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{D}_3(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, 0)$. Поперечные сечения оболочки образованы движением вектора $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ или $\mathbf{d}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x})$. В результате деформации “поперечные” сечения оболочки будут определяться сечением вдоль некоторой линии на несущей поверхности вектора $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$. Иными словами, векторы \mathbf{D}_k определяют “физическое” сечение оболочки, поэтому именно проекции векторов \mathbf{T}^α имеют ясный физический смысл. В частности, $\mathbf{T}^{\alpha 3}$ — перерезывающее усилие в сечении $\mathbf{x}^\alpha = \text{const}$. Будут встречаться тензоры, обладающие следующим свойством:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Такие тензоры мы будем называть плоскими. Примером является первый метрический тензор несущей поверхности

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}^\alpha = (\mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}^\beta) \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{R}_\beta = (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta) \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}^\beta.$$

Этот тензор является метрическим тензором в касательной плоскости, но он также рассматривается как тензор в трехмерном пространстве, т. е. это симметричный тензор второго ранга третьей размерности с нулевым собственным числом. Обычно в теории поверхностей первым метрическим тензором называют компоненты тензора \mathbf{A} :

$$A^{\alpha\beta} = \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}^\beta, \quad A_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta,$$

причем они рассматриваются как ковариантные или контравариантные объекты размерности два. Указанное различие следует иметь в виду при чтении данной работы, ибо при прямой записи основных уравнений теории оболочек они выглядят немного иначе, чем при индексной. Например, уравнения движения содержат дивергенцию тензора усилий $\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T}$, а при индексной записи перерезывающие силы приходится выделять особо. Различий по существу, конечно, не возникает.

Поскольку все построения в этой работе проводятся в трехмерном пространстве и обобщений на пространства большей размерности в ближайшем будущем не предвидится, то в дальнейшем используется операция векторного умножения. Приведем определение векторного произведения двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , используемое в данной работе. Словесное определение векторного произведения такое же, как и в учебной литературе: векторное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} есть вектор, ортогональный \mathbf{a} и \mathbf{b} , равный по модулю величине $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ (θ — угол между \mathbf{a} и \mathbf{b}) и направленный так, чтобы при взгляде с его конца кратчайший поворот первого сомножителя до совмещения со вторым происходил против часовой стрелки. Формальное определение дадим с использованием базиса $\mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t)$. Пусть \mathbf{i}_k — правая ортонормированная тройка векторов: $(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{i}_3 = 1$. Составим ортогональный тензор

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^k \otimes \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^T = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{D} = \pm 1.$$

Тогда

$$\mathbf{D}_s \times \mathbf{D}_k = (\det \mathbf{D}) e_{skm} \mathbf{D}^m, \quad (2.4)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор второго ранга в трехмерном пространстве; e_{skm} — символ перестановки Леви–Чивитта:

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = -e_{213} = -e_{132} = -e_{321} = 1;$$

остальные компоненты равны нулю. Векторное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} теперь определяется формулой

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^s \mathbf{b}^k \mathbf{D}_s \times \mathbf{D}_k = \mathbf{a}^s \mathbf{b}^k (\det \mathbf{D}) e_{skm} \mathbf{D}^m.$$

Скалярное произведение векторов и тензоров обозначается точкой. Будут использоваться обозначения для свертки тензоров

$$\mathbf{C}_{(1)} \overbrace{\cdots \cdots}^{k \text{ точек}} \mathbf{C}_{(2)} = \mathbf{C}_{(3)}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{C}_{(1)}$ — тензор ранга m ; $\mathbf{C}_{(2)}$ — тензор ранга p ; $\mathbf{C}_{(3)}$ — тензор ранга $q = m + p - 2k$, причем $k \leq m$, $k \leq p$.

Представляя тензоры $\mathbf{C}_{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) в базисе \mathbf{D}_k , получаем

$$\mathbf{C}_{(1)} = C_{(1)}^{s_1 \dots s_m} \mathbf{D}_{s_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{s_m}, \quad \mathbf{C}_{(2)} = C_{(2)}^{s_1 \dots s_p} \mathbf{D}_{s_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{s_p},$$

$$\mathbf{C}_{(1)} \cdots \cdots \mathbf{C}_{(2)} = C_{(1)}^{s_1 \dots s_m} C_{(2)}^{r_1 \dots r_p} \delta_{s_m r_1} \delta_{s_{m-1} r_2} \cdots \delta_{s_{m-k} r_k} \mathbf{D}_{s_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{s_{m-k-1}} \otimes \mathbf{D}_{r_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{D}_{r_p},$$

$$C_{(3)}^{i_1 \dots i_q} \equiv C_{(1)}^{s_1 \dots s_m} C_{(2)}^{r_1 \dots r_p} \delta_{s_m r_1} \delta_{s_{m-1} r_2} \cdots \delta_{s_{m-k} r_k}.$$

Например, для тензоров второго ранга

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{pq} \mathbf{D}_p \otimes \mathbf{D}_q \cdot \mathbf{B}_{st} \mathbf{D}^s \otimes \mathbf{D}^t = A^{pq} \mathbf{B}_{qp}.$$

Норма тензора второго ранга определяется формулой

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^T} = \sqrt{A^{pq}A_{pq}}. \quad (2.6)$$

Таким образом, при скалярном умножении тензоров все время скалярно умножаются ближайшие базисные векторы: сначала последний базис левого сомножителя с первым базисом правого сомножителя, затем предпоследний базис — со вторым и так далее, до “исчерпания” всех знаков скалярного произведения. Часто будет встречаться векторный инвариант тензора второго ранга — он обозначается крестом снизу. Например,

$$\mathbf{T}_\times = (\mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{T}^\alpha)_\times \equiv \mathbf{R}_\alpha \times \mathbf{T}^\alpha. \quad (2.7)$$

Векторный инвариант тензора второго ранга есть вектор, для симметричного тензора он равен нулю. Другие обозначения будут оговорены при необходимости непосредственно в тексте.

2.3. Кинематика простых оболочек

Кинематическая модель простой оболочки — материальная поверхность, каждая точка которой является абсолютно твердым телом, обладающим шестью степенями свободы. Движение простой оболочки определяется заданием вектора $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}(x^1, x^2, \mathbf{t})$ и ортогонального тензора $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \equiv \mathbf{D}_k(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \otimes \mathbf{d}^k(\mathbf{x}), \quad \det \mathbf{P} = +1. \quad (2.8)$$

Рассмотрим линейную и угловую скорости тела–точки

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = -\frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right]_\times, \quad (2.9)$$

где точка означает дифференцирование по времени.

Дифференцирование базисов по времени приводит к формулам

$$\dot{\mathbf{R}}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad \dot{\mathbf{D}}_k(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times \mathbf{D}_k(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (2.10)$$

Рассмотрим инвариантный оператор дифференцирования вдоль поверхности

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{S} \equiv \mathbf{R}^\alpha \otimes \partial_\alpha \mathbf{S}, \quad (2.11)$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ — тензор произвольного ранга, заданный на поверхности.

Произведем воздействие посредством этого оператора на вектор $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (2.12)$$

Нетрудно доказать следующие свойства этого тензора:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

т. е. он является ортопроектором. Разложение \mathbf{I} на ортопроекторы имеет вид:

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N},$$

где слагаемое в правой части меняется при движении вдоль поверхности, но сумма остается неизменной. Тензор \mathbf{A} при действии на произвольный вектор проектирует его на касательную плоскость

$$\mathbf{k} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}' \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{k})\mathbf{N}.$$

Умножая последнее равенство скалярно на \mathbf{A} , получаем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{k}'$$

для произвольного плоского вектора $\mathbf{k}' : \mathbf{k}' \cdot \mathbf{N} = 0$. Иными словами, тензор \mathbf{A} есть единичный тензор на касательной плоскости.

Вычисляя градиент от вектора единичной нормали $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$, приходим ко второму метрическому тензору несущей поверхности

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^\top, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (2.13)$$

Дискриминантный тензор несущей поверхности определяется формулой

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{A} \times \mathbf{N} = -\mathbf{N} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{C} = -\mathbf{C}^\top. \quad (2.14)$$

В теории простых оболочек второй метрический тензор несущей поверхности играет сугубо подчиненную роль. Основным интересом, помимо первого метрического тензора, представляет тензор \mathbf{K} , описывающий распределение трехгранников \mathbf{D}_k при движении вдоль поверхности. К этому тензору приходим, вычисляя градиент векторов

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{D}_k = \mathbf{K} \times \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}^\alpha \otimes \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (2.15)$$

где векторы \mathbf{K}_α определяются по уравнению

$$\partial_\alpha \mathbf{D}_k = \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{D}_k. \quad (2.16)$$

Из этого уравнения видно, что векторы \mathbf{K}_α должны подчиняться условию

$$\partial_\alpha \mathbf{K}_\beta - \partial_\beta \mathbf{K}_\alpha - \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{K}_\beta = 0. \quad (2.17)$$

Дифференцируя (2.16) по времени и учитывая (2.10), приходим к формуле

$$\dot{\mathbf{K}}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}_\alpha. \quad (2.18)$$

В дальнейшем будет использоваться вектор $\boldsymbol{\Phi}_\alpha$, который определяется формулой

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha = \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{x}, t) - \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{k}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k}_\alpha = \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{x}, 0). \quad (2.19)$$

Отличие вектора $\boldsymbol{\Phi}_\alpha$ от \mathbf{K}_α , помимо всего, состоит в том, что он обращается в нуль при жестких движениях простой оболочки, поэтому он выполняет функции меры деформации. Подставляя выражение (2.19) в (2.17), приходим к уравнению

$$\partial_\alpha \boldsymbol{\Phi}_\beta - \partial_\beta \boldsymbol{\Phi}_\alpha - \boldsymbol{\Phi}_\alpha \times \boldsymbol{\Phi}_\beta = 0. \quad (2.20)$$

Это уравнение в отличие от (2.17) допускает линеаризацию при малых деформациях простой оболочки. Можно доказать формулу

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha = -\frac{1}{2} [\partial_\alpha \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top]_\times. \quad (2.21)$$

2.4. Энергия, количество движения и кинетический момент

Кинетическая энергия в простой оболочке, как и в любом другом разделе механики деформируемых сред, является аддитивной функцией массы, т. е. представима интегралом по массе

$$\mathcal{K} = \int_{(\mathcal{M})} \mathcal{K}(x, t) dM = \int_{(\Sigma)} \mathcal{K}(x, t) \rho(x, t) d\Sigma, \quad (2.22)$$

где $\mathcal{K}(x, t)$ называется массовой плотностью кинетической энергии. От интегрирования по массе в уравнении (2.22) мы перешли к интегрированию по двумерной области (Σ) , занимаемой простой оболочкой. При этом в рассмотрение была введена неотрицательная функция $\rho(x, t) \geq 0$, называемая поверхностной плотностью массы:

$$dM = \rho(x, t) d\Sigma.$$

Закон сохранения массы приводит к соотношению

$$\rho(x, t) d\Sigma = \rho_0(x) d\sigma \quad \Rightarrow \quad \sqrt{A} \rho(x, t) = \sqrt{a} \rho_0(x), \quad (2.23)$$

где

$$A(x, t) = \det(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta), \quad a(x) = A(x, 0).$$

Соотношение (2.23) позволяет вычислить $\rho(x, t)$ в любой момент времени по заданному движению и начальной плотности.

Плотность кинетической энергии зададим как полную квадратичную форму скоростей

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.24)$$

которая, очевидно, должна быть неотрицательной.

Используя преобразование Лагранжа, приходим к представлению

$$2\mathcal{K} = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1) \cdot (\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1) + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Theta}_2 - \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta}_1^\top) \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.25)$$

Отсюда видим, что тензор $\boldsymbol{\Theta}_2 - \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\Theta}_1^\top$ должен быть неотрицательным.

Количество движения и кинетический момент (момент количества движения) простой оболочки задаются выражениями

$$\mathbf{K}_1^{(2)} = \int_{(\Sigma)} \mathcal{K}_1 \rho d\Sigma, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_2^{(2)} = \int_{(\Sigma)} (\mathcal{K}_2 + \mathbf{R} \times \mathcal{K}_1) \rho d\Sigma, \quad \mathcal{K}_2 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.27)$$

Тензоры $\rho \boldsymbol{\Theta}_1$ и $\rho \boldsymbol{\Theta}_2$ называются первым и вторым тензорами инерции простой оболочки; они характеризуют распределение массы внутри тела–точки, учет перераспределения массы за счет деформации несущей поверхности осуществляется плотностью $\rho(x, t)$. Поскольку, по определению простой оболочки, точки–тела двумерной среды являются абсолютно твердыми телами, то легко устанавливаются формулы

$$\boldsymbol{\Theta}_1(x, t) = \mathbf{P}(x, t) \cdot \boldsymbol{\Theta}_1^0(x) \cdot \mathbf{P}^\top(x, t), \quad \boldsymbol{\Theta}_2(x, t) = \mathbf{P}(x, t) \cdot \boldsymbol{\Theta}_2^0(x) \cdot \mathbf{P}^\top(x, t), \quad (2.28)$$

где $\rho_0\Theta_1^0$ и $\rho_0\Theta_2^0$ — первый и второй тензоры инерции в отсчетной конфигурации. Соотношения (2.28) можно назвать законом сохранения инерции — они являются необходимыми в теории простых оболочек, что доказывается при рассмотрении инвариантности уравнения баланса энергии относительно жестких движений. В целях экономии места этого делать не будем. Конкретный вид тензоров $\rho_0\Theta_\alpha^0(\mathbf{x})$ зависит от специфики рассматриваемых задач. Приведем формулы для этих тензоров в случае, когда оболочка в отсчетной конфигурации имеет постоянную толщину, но она может быть неоднородной по толщине. Другие формулы для $\rho_0\Theta_\alpha^0$ будут приведены в разделе, посвященном теории ребристых оболочек.

Пусть простая оболочка моделирует тонкое тело постоянной толщины. Отсчетную конфигурацию этого тела будем задавать вектором

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}) + z\mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x}, 0),$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in \sigma, \quad -h_1 \leq z \leq h_2, \quad h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0. \quad (2.29)$$

Вектор $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ задает несущую поверхность σ , $h = h_1 + h_2$ — толщина оболочки. Введем в рассмотрение плоский симметричный тензор, называемый геометрическим тензором сдвига

$$\boldsymbol{\mu} = \nabla \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} - z\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, 0). \quad (2.30)$$

Здесь и далее ∇ обозначает градиент в отсчетной конфигурации

$$\nabla \equiv \mathbf{r}^\alpha \otimes \partial_\alpha \equiv \overset{\circ}{\nabla}|_{t=0} \equiv \mathbf{R}^\alpha(\mathbf{x}, 0) \otimes \partial_\alpha. \quad (2.31)$$

Через $\boldsymbol{\mu}^{-1}$ обозначим тензор, являющийся решением системы уравнений

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} = 0. \quad (2.32)$$

Тензор $\boldsymbol{\mu}^{-1}$ — плоский, заметим, что $\boldsymbol{\mu}^{-1}$ в трехмерном пространстве не существует, ибо $\det \boldsymbol{\mu} = 0$. Легко доказывается представление

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{-1} = (\text{tr } \boldsymbol{\mu})\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \det(\mathbf{r}^\alpha \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_\beta) = 1 - 2zH + z^2K, \quad (2.33)$$

где H и K — средняя и гауссова кривизны несущей поверхности.

Масса, первый и второй тензоры инерции трехмерной среды, заключенной внутри области $\{\Delta\sigma \times z\}$, где $\Delta\sigma$ — область на σ , находятся по формулам (что очевидно)

$$\Delta m = \int_{(\Delta\sigma)} \langle \tilde{\rho}_0 \rangle d\sigma, \quad \Delta \mathbf{I}_1 = \int_{(\Delta\sigma)} \langle \mathbf{p} \times \mathbf{I} \tilde{\rho}_0 \rangle d\sigma,$$

$$\Delta \mathbf{I}_2 = \int_{(\Delta\sigma)} \langle [(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})\mathbf{I} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}] \tilde{\rho}_0 \rangle d\sigma, \quad \langle \mathbf{f} \rangle \equiv \int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{f} \mu dz, \quad (2.34)$$

где $\tilde{\rho}_0(\mathbf{x}, z)$ — плотность трехмерной среды в отсчетной конфигурации.

Представляется естественным принять определения:

$$\rho_0 = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} = \langle \tilde{\rho}_0 \rangle, \quad \rho_0\Theta_1^0 = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{I}_1}{\Delta\sigma} = -\langle \tilde{\rho}_0 z \rangle \mathbf{c},$$

$$\rho_0\Theta_2^0 = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{I}_2}{\Delta\sigma} = \langle \tilde{\rho}_0 z^2 \rangle \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{n}. \quad (2.35)$$

Тензор \mathbf{c} — дискриминантный тензор на несущей поверхности в отсчетной конфигурации: $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, 0)$ — см. (2.14). Из формул (2.35) следуют равенства

$$\Theta_\alpha^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \Theta_\alpha^0 = 0, \quad \mathbf{Q} \cdot \Theta_\alpha^0 \cdot \mathbf{Q}^\top = \Theta_\alpha^0, \quad (2.36)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ — ортогональный тензор поворота ($\det \mathbf{Q} = 1$) вокруг нормали $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ на произвольный угол.

Выберем $\mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t)$ так, чтобы $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{d}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$. Выбор \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 безразличен при условии сохранения ортонормированности $\mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t)$. Согласно уравнению (2.8), имеем представление

$$\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{P}. \quad (2.37)$$

Конечно, $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t)$ может не совпадать с $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$; равенство $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ эквивалентно принятию гипотез Кирхгофа–Лява.

Умножая уравнение (2.28) \mathbf{D}_3 скалярно слева и справа и учитывая уравнение (2.36), (2.37), приходим к равенствам

$$\Theta_\alpha \cdot \mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_3 \cdot \Theta_\alpha = 0. \quad (2.38)$$

Рассмотрим тензор поворота вокруг $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{D}_3 + \cos \theta (\mathbf{I} - \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{D}_3) + \sin \theta \mathbf{D}_3 \times \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{Q} = 1, \quad (2.39)$$

где θ — произвольный угол поворота вокруг \mathbf{D}_3 .

Подставляя уравнение (2.35) в (2.28), получаем тензоры инерции в актуальной конфигурации

$$\rho \Theta_2 = \frac{\rho}{\rho_0} \langle \tilde{\rho}_0 z^2 \rangle (\mathbf{I} - \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{D}_3), \quad \rho \Theta_1^\top = \frac{\rho}{\rho_0} \langle \tilde{\rho}_0 z \rangle (\mathbf{I} \times \mathbf{D}_3). \quad (2.40)$$

Легко убедиться, что $\rho \Theta_\alpha$ не меняются при поворотах (2.39)

$$\rho \mathbf{Q} \cdot \Theta_\alpha \cdot \mathbf{Q}^\top = \rho \Theta_\alpha. \quad (2.41)$$

Эти свойства тензоров инерции будут использованы при установлении шестого уравнения равновесия.

2.5. Тензоры усилий и моментов. Уравнения движения

Мысленно выделим произвольный кусок простой оболочки, рассматриваемой в момент времени t . В этот момент на выделенную часть $\Delta \Sigma$ действуют некоторые усилия и моменты. В механике деформируемых тел их принято различать по происхождению и способу действия. По происхождению усилия и моменты разделяют на две категории: внешние и внутренние. При этом внешними называют те усилия и моменты, которые порождены воздействием окружающей среды и считаются заданными. Разумеется, такое определение является несколько условным, однако дать формальное и строгое определение едва ли возможно. По способу действия усилия и моменты разделяют на массовые и контурные. Первые действуют на каждую частицу оснащенной поверхности, а вторые — по контурным линиям, ограничивающим часть несущей поверхности.

Примем обозначения: $\rho \mathbf{F}$, $\rho \mathbf{L}$ — сила и момент, действующие на единицу площади несущей поверхности; \mathbf{F}_c , \mathbf{L}_c — усилия и моменты, действующие на единицу длины контура C , ограничивающего рассматриваемую часть оснащенной поверхности.

Таким образом, имеем формулы:

$$\text{Главный вектор сил} = \int_{\Delta\Sigma} \rho \mathbf{F} d\Sigma + \int_C \mathbf{F}_C dC, \quad (2.42)$$

$$\text{Главный момент сил} = \int_{\Delta\Sigma} \rho (\mathbf{L} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}) d\Sigma + \int_C (\mathbf{L}_C + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_C) dC. \quad (2.43)$$

При введении тензоров усилий и моментов будем следовать традиционному пути [176]. Запишем уравнения баланса количества движения и кинетического момента для части поверхности $\Delta\Sigma$. Используя формулы (2.42), (2.43), (2.26) и (2.27), эти уравнения записываем в виде

$$\int_{\Delta\Sigma} \rho (\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1) d\Sigma + \int_C \mathbf{F}_C dC = 0, \quad (2.44)$$

$$\int_{\Delta\Sigma} \rho [\mathbf{L} - \dot{\mathcal{K}}_2 + \mathbf{R} \times (\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1) - \mathbf{v} \times \dot{\mathcal{K}}_1] d\Sigma + \int_C (\mathbf{L}_C + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_C) dC = 0, \quad (2.45)$$

где \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 — плотности количества движения и кинетического момента (2.26) и (2.27).

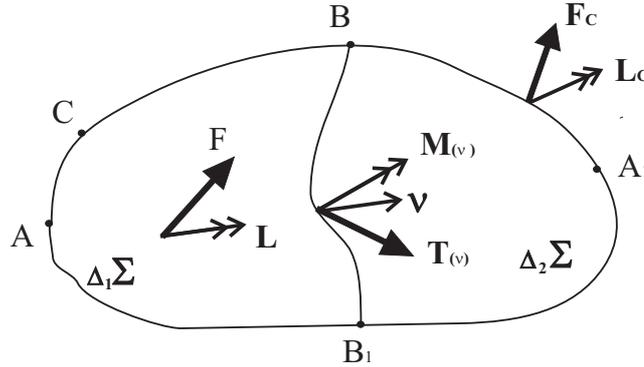


Рис. 2.1:

Мысленно рассечем рассматриваемую область $\Delta\Sigma$ на две части, причем линию раздела выбираем произвольно (рис. 2.1): $\Delta\Sigma = \Delta_1\Sigma + \Delta_2\Sigma$. В дополнение к принятым обозначениям введем следующие: \mathbf{v} — единичный вектор нормали к линии раздела, лежащий в касательной плоскости несущей поверхности; $\mathbf{T}_{(\mathbf{v})}$, $\mathbf{M}_{(\mathbf{v})}$, — векторы усилия и момента (на единицу длины), моделирующие воздействие части тела, находящегося со стороны положительного направления нормали. Для каждой из областей мы имеем уравнения, аналогичные (2.44):

$$\int_{\Delta_1\Sigma} \rho (\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1) d\Sigma + \int_{\sim B A B_1} \mathbf{F}_C dC + \int_{\sim B_1 B} \mathbf{T}_{(\mathbf{v})} dl = 0,$$

$$\int_{\Delta_2\Sigma} \rho (\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1) d\Sigma + \int_{\sim B_1 A_1 B} \mathbf{F}_C dC + \int_{\sim B B_1} \mathbf{T}_{(-\mathbf{v})} dl = 0.$$

Складывая эти два уравнения, учитывая (2.44) и меняя направление интегрирования в последнем слагаемом второго уравнения, получаем

$$\int_{\sim B_1 B} [\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} + \mathbf{T}_{(-\mathbf{v})}] dl = 0.$$

Поскольку линия раздела выбирается совершенно произвольно, включая концевые точки B и B_1 (за счет произвольности выбора контура C), то из последнего равенства получаем

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} = -\mathbf{T}_{(-\mathbf{v})}. \quad (2.46)$$

Аналогично можно получить еще одно равенство

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{v})} = -\mathbf{M}_{(-\mathbf{v})}. \quad (2.47)$$

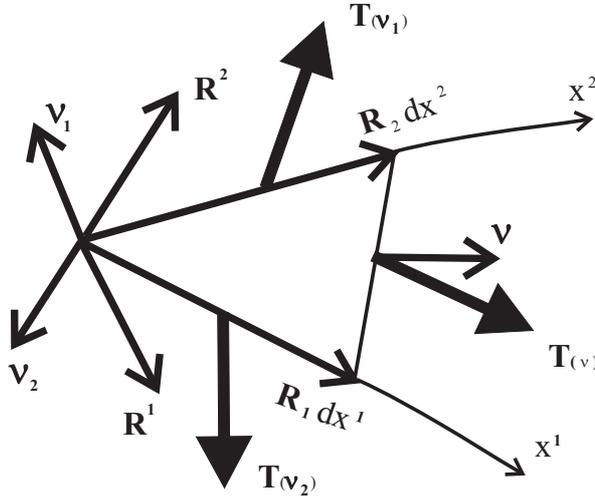


Рис. 2.2:

Применяя уравнение (2.44) к элементарному криволинейному треугольнику (рис. 2.2), лежащему на несущей поверхности, и отбрасывая малые второго порядка, получим равенство

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v}_2)}|\mathbf{R}_1 dx^1| + \mathbf{T}_{(\mathbf{v}_1)}|\mathbf{R}_2 dx^2| + \mathbf{T}_{(\mathbf{v})}dl = 0. \quad (2.48)$$

Кроме того, имеем равенство

$$\mathbf{v}_2|\mathbf{R}_1 dx^1| + \mathbf{v}_1|\mathbf{R}_2 dx^2| + \mathbf{v}dl = 0. \quad (2.49)$$

Используем теперь очевидные соотношения

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\mathbf{R}^1}{\sqrt{\mathbf{R}^1 \cdot \mathbf{R}^1}}; \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{\mathbf{R}^2}{\sqrt{\mathbf{R}^2 \cdot \mathbf{R}^2}} \quad (2.50)$$

и перепишем (2.49) в виде

$$\mathbf{v}dl = \sqrt{A} (\mathbf{R}^2|dx^1| + \mathbf{R}^1|dx^2|). \quad (2.51)$$

Из последнего соотношения получаем

$$\sqrt{A}|dx^2| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_1 dl, \quad \sqrt{A}|dx^1| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_2 dl.$$

Подставляя эти соотношения в (2.48) и учитывая равенства

$$A_{11} = AA^{22}, \quad A_{22} = AA^{11}, \quad A_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta, \quad A^{\alpha\beta} \equiv \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}^\beta,$$

переписываем уравнение (2.48) в виде:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \left[\mathbf{R}_1 \otimes \sqrt{A^{11}} \mathbf{T}_{(1)} + \mathbf{R}_2 \otimes \sqrt{A^{22}} \mathbf{T}_{(2)} \right]. \quad (2.52)$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{T}_{(1)} = -\mathbf{T}_{(\mathbf{v}_1)}, \quad \mathbf{T}_{(2)} = -\mathbf{T}_{(\mathbf{v}_2)}$$

для физических векторов усилий, действующих в сечениях $x^1 = \text{const}$ и $x^2 = \text{const}$, соответственно.

Поскольку левая часть уравнения(2.52) и вектор \mathbf{v} правой части уравнения(2.52) не зависят от выбора системы координат, то и выражение в квадратных скобках не зависит от выбора системы координат. Это, в свою очередь, возможно только в том случае, когда при переходе к новой системе координат величины

$$\mathbf{T}^\alpha \equiv \sqrt{A^{\alpha\alpha}} \mathbf{T}_{(\alpha)} \quad \text{не суммировать по } \alpha, \quad (2.53)$$

преобразуются как контравариантные объекты. Итак, вместо уравнения (2.52) можно написать

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} \equiv \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{T}^\alpha. \quad (2.54)$$

Последним выражением мы ввели в рассмотрение несимметричный тензор второго ранга, называемый тензором усилий. Первая из формул (2.54) показывает, как этого и следовало ожидать, что формула Коши остается справедливой и для двумерных сред, обладающих кривизной.

Совершенно аналогичные рассуждения приводят к формулам

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{M}^\alpha, \quad \mathbf{M}^\alpha = \sqrt{A^{\alpha\alpha}} \mathbf{M}_{(\alpha)}, \quad (2.55)$$

где векторы $\mathbf{M}_{(\alpha)}$ суть физические векторы моментов (на единицу длины), действующие по координатным линиям $x^\alpha = \text{const}$.

Тензор второго ранга \mathbf{M} называется тензором моментов. В дальнейшем мы часто будем записывать тензоры \mathbf{T} и \mathbf{M} в смешанном базисе

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\alpha k} \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^{\alpha k} \mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{D}_k. \quad (2.56)$$

Именно такое представление \mathbf{T} и \mathbf{M} будет в высшей степени подходящим в последующих построениях. В классических теориях оболочек тензор \mathbf{M} является плоским: $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = 0$, однако мы этого условия не принимаем. И, действительно, в теории ребристых оболочек будем иметь $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} \neq 0$.

В заключение приведем краткий вывод уравнений движения в локальной форме. Для этого заметим, что

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{T}_{(\mathbf{v})}|_C = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}|_C, \quad \mathbf{L}_C = \mathbf{M}_{(\mathbf{v})}|_C = \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}|_C.$$

Тогда интегральные уравнения движения перепишем в виде:

$$\int_{\Delta\Sigma} \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1) d\Sigma + \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} dC = 0, \quad (2.57)$$

$$\int_{\Delta\Sigma} \rho \left[(\mathbf{L} - \dot{\mathcal{K}}_2 - \mathbf{v} \times \mathcal{K}_1 + \mathbf{R} \times (\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1)) \right] d\Sigma + \int_C \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{T} \times \mathbf{R}) dC = 0. \quad (2.58)$$

Дальнейшие преобразования этих уравнений опираются на теорему о дивергенции [74]. Напомним ее формулировку в удобных для нас обозначениях.

Теорема: для произвольного тензорного поля $\mathbf{S}(x, t)$ заданного на поверхности, но не обязательно принадлежащего ей, справедливо тождество

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}(x, t) dC = \int_{(\Delta\Sigma)} \left[\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{S} + (\text{tr } \mathbf{B}) \mathbf{N} \cdot \mathbf{S} \right] d\Sigma, \quad (2.59)$$

где \mathbf{v} — единичная внешняя нормаль к C , $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0$; \mathbf{N} — нормаль к Σ ; \mathbf{B} — второй метрический тензор.

Кроме того, в уравнение (2.59) введена операция $\overset{\circ}{\nabla} \cdot$, которая определена формулой

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{S} \equiv \mathbf{R}^\alpha \cdot \partial_\alpha \mathbf{S}. \quad (2.60)$$

Используя теорему о дивергенции и произвольность $\Delta\Sigma$, уравнение (2.57) переписываем в локальной форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho [\dot{\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\Theta}_1^T \cdot \boldsymbol{\Omega})]. \quad (2.61)$$

Контурный интеграл в уравнении (2.58) преобразуем так:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{T} \times \mathbf{R}) dC = \int_{\Delta\Sigma} [\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{M} - \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{R})] d\Sigma = \int_{\Delta\Sigma} [\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{R}] d\Sigma,$$

где $\mathbf{T}_\times \equiv (\mathbf{R}_\alpha \otimes \mathbf{T}^\alpha)_\times \equiv \mathbf{R}_\alpha \times \mathbf{T}^\alpha$ — векторный инвариант тензора усилий.

Теперь уравнение (2.58) можно переписать в локальной форме:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} = \rho [\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}] + \rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Theta}_1^T \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.62)$$

Несмотря на всю простоту вывода, уравнения (2.61) и (2.62) получены, вероятно, впервые, хотя в литературе существует множество похожих уравнений (отличие состоит, конечно, в правых частях этих уравнений).

2.6. Тензоры усилий и моментов Пиола–Кирхгофа

Часто бывает удобным записывать уравнения движения в недеформированной метрике. Для этого вводят в рассмотрение тензоры усилий и моментов, вычисленные на единицу длины недеформированного контура. Рассмотрим произвольный контур C , лежащий на несущей поверхности. Полное усилие, приходящееся на бесконечно малый элемент этого конуса, равно $\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} dC$.

Введем в рассмотрение новый вектор усилия, “действующий” на недеформированный контур \mathbf{c} , такой, что

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v})}d\mathbf{C} = \mathbf{T}_{\pi(\mathbf{v}_0)}d\mathbf{c}, \quad (2.63)$$

где \mathbf{v}_0 — единичная внешняя нормаль к контуру \mathbf{c} , лежащая в касательной плоскости недеформированной несущей поверхности.

Запишем уравнение (2.63) в виде

$$\mathbf{T}_{\pi(\mathbf{v}_0)} = \frac{d\mathbf{C}}{d\mathbf{c}}\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} = \frac{d\mathbf{C}}{d\mathbf{c}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.64)$$

Можно доказать следующую формулу для преобразования нормали в результате деформации:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\bar{A}}{a}} \frac{d\mathbf{c}}{d\mathbf{C}} \mathbf{v}_0 \cdot (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T. \quad (2.65)$$

Внося это выражение в (2.64), получаем

$$\mathbf{T}_{\pi(\mathbf{v}_0)} = \mathbf{v}_0 \cdot \sqrt{\frac{\bar{A}}{a}} (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{T} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{T}_\pi, \quad (2.66)$$

где введен тензор усилий Пиола–Кирхгофа

$$\mathbf{T}_\pi = \sqrt{\frac{\bar{A}}{a}} (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{T} = \sqrt{\frac{\bar{A}}{a}} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{T}^\alpha. \quad (2.67)$$

Совершенно аналогичным образом вводится тензор моментов Пиола–Кирхгофа:

$$\mathbf{M}_\pi = \sqrt{\frac{\bar{A}}{a}} (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{M} = \sqrt{\frac{\bar{A}}{a}} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{M}^\alpha, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{M}_{\pi(\mathbf{v}_0)} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{M}_\pi, \quad \mathbf{M}_{\pi(\mathbf{v}_0)}d\mathbf{c} = \mathbf{M}_{(\mathbf{v})}d\mathbf{C}. \quad (2.69)$$

Используя тензоры Пиола–Кирхгофа, перепишем уравнения (2.57), (2.58) в следующей форме:

$$\int_{\Delta\sigma} \rho_0(\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1)d\sigma + \int_{\mathbf{c}} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{T}_\pi d\mathbf{c} = 0, \quad (2.70)$$

$$\int_{\Delta\sigma} \rho_0 \left[(\mathbf{L} - \dot{\mathcal{K}}_2 + \mathbf{R} \times (\mathbf{F} - \dot{\mathcal{K}}_1) - \mathbf{v} \times \mathcal{K}_1 \right] d\sigma + \int_{\mathbf{c}} \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{M}_\pi - \mathbf{T}_\pi \times \mathbf{R}) d\mathbf{c} = 0. \quad (2.71)$$

Проводя те же преобразования, как и ранее, получаем следующие локальные уравнения движения в недеформированной метрике:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_\pi + \rho_0 \mathbf{F} = \rho_0 [\mathbf{v} + \Theta_1^T \cdot \Omega], \quad (2.72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_\pi + [\nabla \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}_\pi]_\times + \rho_0 \mathbf{L} = \rho_0 [\Theta_1 \cdot \mathbf{v} + \Theta_2 \cdot \Omega] + \rho_0 \mathbf{v} \times \Theta_1^T \cdot \Omega. \quad (2.73)$$

2.7. Уравнение баланса энергии и тензоры деформации

Под балансом энергии механической системы понимают следующее утверждение: скорость изменения полной энергии механической системы равна мощности приложенных к ней внешних сил и притока энергии немеханического происхождения (обычно в виде тепла). Запишем это утверждение для части $\Delta\Sigma$ простой оболочки:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta\Sigma} \rho(\mathcal{K} + \mathcal{U}) d\Sigma = \int_{\Delta\Sigma} \rho(\mathbf{g} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\Sigma + \int_{\mathcal{C}} [\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_{(\mathbf{v})} \cdot \boldsymbol{\Omega} - h_{(\mathbf{v})}] dC. \quad (2.74)$$

В данное выражение помимо ранее введенных величин вошли новые функции. Прежде всего, в уравнение (2.74) вошла внутренняя энергия, которая предполагается аддитивной функцией массы, т. е. представима в виде интеграла по массе от функции \mathcal{U} , называемой плотностью внутренней энергии. В дальнейшем мы почти исключительно будем иметь дело именно с плотностью внутренней энергии. Для краткости слово “плотность” будем опускать. Обычно это не приводит к каким-либо недоразумениям. Далее, в уравнение (2.74) входят еще две новые функции: \mathbf{g} — “производство” тепла на единицу массы оснащенной поверхности и $h_{(\mathbf{v})}$ — отток тепла с поверхности через ее границу. Подробнее эти величины будут обсуждаться в дальнейшем.

Запишем уравнение (2.74) в локальной форме. Для этого нужно преобразовать контурный интеграл в поверхностный, а затем воспользоваться произвольностью выбора $\Delta\Sigma$. В контурный интеграл входит $h_{(\mathbf{v})}$ — отток тепла через границу. В соответствии с принципом теплового потока тепла \mathbf{h} , такой, что

$$h_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (2.75)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — единичная внешняя нормаль к \mathcal{C} .

Используем теперь теорему о дивергенции (2.59) и запишем уравнение

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{T}_{(\mathbf{v})} \cdot \mathbf{v} dC = \int_{\Delta\Sigma} [\rho(\dot{\mathcal{K}}_1 - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T}^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}] d\Sigma, \quad (2.76)$$

при получении которого было использовано уравнение движения (2.61).

Аналогично, но с использованием уравнения (2.62), получаем равенство

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{M}_{(\mathbf{v})} \cdot \boldsymbol{\Omega} dC = \int_{\Delta\Sigma} [\rho(\dot{\mathcal{K}}_2 + \mathbf{v} \times \dot{\mathcal{K}}_1 - \mathbf{L}) \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{T}_\times \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\Omega}] d\Sigma. \quad (2.77)$$

Наконец, для теплового члена с учетом уравнения (2.75) имеем

$$\int_{\mathcal{C}} h_{(\mathbf{v})} dC = \int_{(\Delta\Sigma)} \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h} d\Sigma. \quad (2.78)$$

Подставляя выражения (2.76)–(2.78) в (2.74) и учитывая (2.44)–(2.45), а также произвольность выбора $\Delta\Sigma$, приходим к локальной форме уравнения баланса энергии

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} - (\mathbf{R}_\alpha \times \mathbf{T}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{M}^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\Omega} - \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.79)$$

Уравнение (2.79) нуждается в дальнейших преобразованиях, однако в некоторых задачах о неупругой деформации простых оболочек удобной является именно эта форма, как показано для трехмерной среды В.А. Пальмовым [164].

Перепишем первые два слагаемых в (2.79) следующим образом:

$$\mathbf{T}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} - \mathbf{T}_\times \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{T}^\alpha \cdot (\partial_\alpha \mathbf{v} + \mathbf{R}_\alpha \times \boldsymbol{\Omega}). \quad (2.80)$$

Используем тождества

$$\mathbf{T}^\alpha = \Gamma^{\alpha k} \mathbf{D}_k, \quad \partial_\alpha \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_\alpha, \quad \mathbf{D}_k \cdot (\mathbf{R}_\alpha \times \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{R}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{D}}_k,$$

и запишем уравнение (2.80) в виде

$$\mathbf{T}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} - \mathbf{T}_\times \cdot \boldsymbol{\Omega} = \Gamma^{\alpha k} (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{D}_k) \bullet = \mathbf{T}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times = \mathbf{T}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.81)$$

где

$$\mathbf{A}^\times = (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{D}_k) \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{d}^k \equiv \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{A}^\times - \mathbf{a}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{T}_\mathfrak{g} = \mathbf{T}^{\alpha k} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{d}_k = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}. \quad (2.83)$$

Тензор $\mathbf{T}_\mathfrak{g}$, следуя А.И. Лурье [136], будем называть энергетическим тензором усилий. Тензоры \mathbf{A}^\times и \mathbf{E} являются объектами, на которых совершает работу энергетический тензор усилий, и называются первыми мерой и тензором деформации, соответственно.

Третье слагаемое в уравнении (2.79) можно записать в виде

$$\mathbf{M}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}^\alpha \cdot \partial_\alpha \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times = \mathbf{M}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}, \quad (2.84)$$

где

$$\mathbf{K}^\times = (\mathbf{K}_\alpha \cdot \mathbf{D}_k) \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{d}^k, \quad \mathbf{F} = \mathbf{K}^\times - \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{K}(\mathbf{x}, 0), \quad (2.85)$$

$$\mathbf{M}_\mathfrak{g} = \mathbf{M}^{\alpha k} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{d}_k = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r})^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}. \quad (2.86)$$

Тензор $\mathbf{M}_\mathfrak{g}$ называется энергетическим тензором моментов; \mathbf{K}^\times и \mathbf{F} — вторые мера и тензор деформации простой оболочки, соответственно. При получении уравнения (2.84) использовалась формула (2.18). Подробнее тензоры и меры деформации будут обсуждены далее (п.2.8). Подставляя уравнения (2.81) и (2.84) в (2.79), приходим к следующим формам уравнения баланса энергии

$$\rho \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{T}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times + \mathbf{M}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times - \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h} + \rho g(\mathbf{x}, t) \quad (2.87)$$

или

$$\rho \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{T}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{M}_\mathfrak{g}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} - \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h} + \rho g(\mathbf{x}, t). \quad (2.88)$$

Уравнение баланса энергии должно выполняться при всех мыслимых процессах деформации простых оболочек, как упругих (без рассеяния энергии), так и неупругих.

Ниже понадобится другая форма записи уравнения баланса энергии. Будем различать “верхнюю” и “нижнюю” стороны простой оболочки, которые будем отмечать индексами 1 и 2, соответственно, причем считаем, что нормаль с несущей поверхности направлена от стороны 2 к стороне 1. Рассмотрим тело–точку простой оболочки, не принадлежащую контуру S . Обозначим через t_+ и t_- предельные значения температур окружающей среды, находящейся со стороны положительного и отрицательного направления нормали соответственно при приближении (вдоль нормали) к точке с координатами \mathbf{x}^1 и \mathbf{x}^2 .

Поверхностное производство тепла представим в виде суммы трех слагаемых

$$\rho g(\mathbf{x}, t) = \rho g_1(\mathbf{x}, t) + \rho g_2(\mathbf{x}, t) + \rho g_0(\mathbf{x}, t), \quad (2.89)$$

где ρg_1 — скорость подвода тепла на единицу площади от среды с температурой t_+ ; ρg_2 — то же от среды с температурой t_- ; ρg_0 — производство тепла “внутри” простой оболочки.

Все величины, за исключением тензоров и мер деформации, входящие в уравнения (2.87) и (2.88), разобьем на два слагаемых, каждое из которых приписывается либо стороне 1, либо стороне 2.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2, \quad \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_{\alpha 1} + \mathbf{T}_{\alpha 2}, \quad \mathbf{M}_\alpha = \mathbf{M}_{\alpha 1} + \mathbf{M}_{\alpha 2}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2, \quad g_0 = g_{01} + g_{02}. \quad (2.90)$$

Запишем теперь уравнение (2.87) в виде двух равенств

$$\rho \dot{\mathbf{U}}_\alpha - \mathbf{T}_{\alpha\alpha}^\top \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times - \mathbf{M}_{\alpha\alpha}^\top \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times = \rho g_\alpha + \rho g_{0\alpha} + \rho Q_\alpha - \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.91)$$

Здесь введена в рассмотрение новая величина

$$Q = Q_1 = -Q_2,$$

называемая обменным теплом, т. е. теплом, которым обмениваются стороны 1 и 2 в единицу времени. Таким образом, ρQ_1 — скорость подвода тепла к стороне 1 от стороны 2 на единицу площади; ρQ_2 — скорость подвода тепла от стороны 1 к единице площади стороны 2. Эти величины равны друг другу по модулю и обратны по знаку. Представления (2.87) понадобятся при формулировке приведенных неравенств диссипации энергии.

2.8. Тензоры и меры деформации простой оболочки

Уравнением баланса энергии в рассмотрение были введены меры и тензоры деформации как такие объекты, на которых совершают работу энергетические тензоры усилий и моментов. В п.2.8 рассмотрен геометрический смысл этих тензоров. Сначала изучим меру деформации:

$$\mathbf{A}^\times = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (2.92)$$

Рассмотрим бесконечно малый отрезок материального волокна простой оболочки $d\mathbf{r}$. В результате деформации он превратится в $d\mathbf{R}$:

$$d\mathbf{R} = dx^\alpha \mathbf{R}_\alpha = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (2.93)$$

Обозначая

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{S} \mathbf{e}^*, \quad d\mathbf{r} = ds \mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}^*| = |\mathbf{e}| = 1,$$

получим из уравнения (2.93) формулу

$$\frac{(d\mathbf{S})^2}{(ds)^2} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times\top} \cdot \mathbf{e}. \quad (2.94)$$

Рассмотрим два отрезка: $d\mathbf{r}_1 = ds_1 \mathbf{e}_1$ и $d\mathbf{r}_2 = ds_2 \mathbf{e}_2$. После деформации они превращаются в $d\mathbf{R}_1 = d\mathbf{S}_1 \mathbf{e}_1^*$ и $d\mathbf{R}_2 = d\mathbf{S}_2 \mathbf{e}_2^*$, соответственно. Пусть далее \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 ортогональны между собой, а \mathbf{e}_1^* и \mathbf{e}_2^* составляют угол $(1/2\pi - \theta)$.

Тогда имеем формулу

$$\frac{d\mathbf{S}_1}{ds_1} \frac{d\mathbf{S}_2}{ds_2} \sin \theta = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times\top} \cdot \mathbf{e}_2. \quad (2.95)$$

Рассмотрим теперь повороты тел-точек относительно несущей поверхности. Выберем векторы \mathbf{D}_k так, чтобы $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, 0) = d_3(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x})$. Вычислим произведение

$$d\mathbf{R} \cdot \mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t) = \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{D}_3 = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{P}^\times \cdot \mathbf{D}_3 = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n} = d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n}, \quad (2.96)$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ называется вектором деформации поперечного сдвига. Обращение $\boldsymbol{\gamma}$ в нуль означает равенство $\mathbf{D}_3 = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$, т. е. принятие гипотез Кирхгофа–Лява. Формулами (2.94)–(2.96) установлен геометрический смысл первой меры деформации. Обратимся ко второй мере деформации \mathbf{K}^\times . Ее смысл будет установлен одновременно со смыслом второго тензора деформации \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^\times - \mathbf{k} = (\boldsymbol{\Phi}_\alpha \cdot \mathbf{D}_k) \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{d}^k, \quad (2.97)$$

где векторы $\boldsymbol{\Phi}_\alpha$ определены формулой (2.21):

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha = -\frac{1}{2} [\partial_\alpha \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top]_\times. \quad (2.98)$$

Произвольный тензор поворота ($\det \mathbf{P} = 1$) может быть представлен в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{I}, \quad (2.99)$$

где \mathbf{m} называется осью вращения. Можно доказать формулу

$$(\boldsymbol{\Phi}_\alpha \cdot \mathbf{D}_k) \mathbf{d}^k = \boldsymbol{\Phi}_\alpha \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{2} [\mathbf{P}^\top \cdot \partial_\alpha \mathbf{P}]_\times. \quad (2.100)$$

Подставляя выражение (2.99) в (2.97), получаем

$$\mathbf{F} = \nabla \theta \otimes \mathbf{m} + \sin \theta \nabla \mathbf{m} + (1 - \cos \theta) \nabla \mathbf{m} \times \mathbf{m}. \quad (2.101)$$

Для бесконечно малых поворотов $\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1$ и тензор \mathbf{F} принимает вид

$$\mathbf{F} = \nabla(\theta \mathbf{m}) = \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \theta \mathbf{m}, \quad (2.102)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ — вектор бесконечно малого поворота.

Найдем теперь поворот тела–точки с координатами $\mathbf{x}^\alpha + d\mathbf{x}^\alpha$ относительно тела – точки с координатами \mathbf{x}^α . Очевидно, что

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}^\alpha + d\mathbf{x}^\alpha, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + d\mathbf{x}^\alpha \partial_\alpha \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \quad (2.103)$$

есть поворот тела–точки с координатами $\mathbf{x}^\alpha + d\mathbf{x}^\alpha$. Вычитая из него поворот тела–точки с координатами \mathbf{x}^α , т.е. умножая выражение (2.103) на $\mathbf{P}^\top(\mathbf{x}, t)$ слева и учитывая (2.97) и (2.100), получаем

$$2d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = -[\mathbf{P}^\top(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t)]_\times, \quad (2.104)$$

где $d\mathbf{r}$ — вектор, соединяющий точки $\mathbf{x}^\alpha + d\mathbf{x}^\alpha$ и \mathbf{x}^α .

Ортогональный тензор в правой части уравнения (2.104) можно представить в виде (2.99):

$$\mathbf{P}^\top(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{I}, \quad (2.105)$$

где $d\theta$ — бесконечно малый угол, на который нужно повернуть триэдр $\mathbf{D}_k(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t)$ до совмещения с $\mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t)$ вокруг оси вращения \mathbf{m} . Вычисляя векторный инвариант обеих частей (2.105) и подставляя результат в (2.104), получаем

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = d\theta \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{e} = \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2, \quad d\mathbf{r} = ds \mathbf{e}. \quad (2.106)$$

Этим установлен геометрический смысл $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$.

В заключение этого пункта приведем выражение для \mathbf{F} через вектор конечного поворота, который направлен по оси вращения \mathbf{m} и имеет длину, равную $2 \operatorname{tg} \theta/2$.

Тогда уравнение (2.99) записывается в виде

$$\left(1 + \frac{1}{4} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \mathbf{P} = \left(1 - \frac{1}{4} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) \mathbf{I} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \otimes \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\varphi} \equiv 2 \operatorname{tg}(\theta/2) \mathbf{m}.$$

Подставляя это выражение в (2.100), а результат — в (2.97), получаем

$$\mathbf{F} = \frac{1}{1 + 1/4 \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \left[\nabla \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right]. \quad (2.107)$$

2.9. Приведенные неравенства диссипации энергии

Вернемся к законам термодинамики. В механике сплошной среды второй закон термодинамики часто записывают в форме неравенства Клаузиуса–Дюгейма:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho S dV \geq \int_{(V)} \rho \frac{g}{t_*} dV - \int_{(O)} \frac{h}{t_*} dO. \quad (2.108)$$

Здесь V — произвольный объем тела; O — его граница; S — плотность энтропии; g — тепловой источник; h — скорость оттока тепла через O ; t_* — абсолютная температура. При написании уравнения (2.100) предполагалось, что t_* непрерывна внутри V и при переходе через O , а тепловой источник g не имеет “контактов” с внешней средой. Перенесение неравенства Клаузиуса–Дюгейма на простые оболочки вызывает серьезные затруднения, ибо все точки простой оболочки находятся в контакте с внешней средой. Можно предложить следующую формулировку второго закона термодинамики применительно к двумерной среде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta \Sigma} \rho S_1 d\Sigma \geq \int_{\Delta \Sigma} \rho \left[\frac{g_{01}}{t_1} + \frac{g_1}{t_+} + \frac{Q_1}{t_2} \right] d\Sigma - \int \frac{h_{(v)}^{(1)}}{t_1} dC, \quad (2.109)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta \Sigma} \rho S_2 d\Sigma \geq \int_{\Delta \Sigma} \rho \left[\frac{g_{02}}{t_2} + \frac{g_2}{t_-} + \frac{Q_2}{t_1} \right] d\Sigma - \int \frac{h_{(v)}^{(2)}}{t_2} dC. \quad (2.110)$$

Здесь, помимо введенных ранее обозначений, принято: t_α , S_α — температура и плотность энтропии стороны α ($\alpha = 1, 2$, соответственно). Полная плотность энтропии определяется как сумма

$$S = S_1 + S_2. \quad (2.111)$$

Изучение неравенств (2.109)–(2.110) показывает, что они приводят к следствиям, вполне согласующимся с физическими представлениями. Неравенства (2.109) и (2.110) были предложены в работах [92], [93] и существенно отличаются от известной в литературе работы [230], где второй закон термодинамики формулируется, во-первых, в виде одного неравенства, аналогично (2.108), а во-вторых, не учитывается взаимодействие с внешней средой. Поэтому, в частности, в известной формулировке невозможно учесть перепад температур по толщине оболочки.

Преобразуя контурные интегралы в (2.109) – (2.110) в поверхностные, используя принцип теплового потока Фурье–Стокса

$$\mathbf{h}_{(\mathbf{v})}^{(\alpha)} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.112)$$

и теорему о дивергенции, после несложных преобразований приходим к локальной записи неравенств диссипации энергии

$$\rho \dot{S}_1 - \rho g_1 \frac{t_1 - t_+}{t_1 t_+} - \rho Q_1 \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2} - \frac{1}{t_1} [\rho g_{01} + \rho g_1 + \rho Q_1 - \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h}_{(1)}] - \frac{1}{t_1^2} \mathbf{h}_{(1)} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 \geq 0, \quad (2.113)$$

$$\rho \dot{S}_2 - \rho g_2 \frac{t_2 - t_-}{t_2 t_-} - \rho Q_2 \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} - \frac{1}{t_2} [\rho g_{02} + \rho g_2 + \rho Q_2 - \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h}_{(2)}] - \frac{1}{t_2^2} \mathbf{h}_{(2)} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_2 \geq 0. \quad (2.114)$$

Чтобы получить приведенные неравенства диссипации, необходимо из выражений (2.113)–(2.114) исключить количества, заключенные в квадратные скобки. Используя уравнение (2.91), приходим к требуемым приведенным неравенствам

$$\begin{aligned} & \rho t_1 \dot{S}_1 - \rho g_1 (t_1 - t_+) t_+^{-1} - \rho Q_1 (t_1 - t_2) t_2^{-1} - \\ & - \rho \dot{U}_1 + \mathbf{T}_{\mathfrak{S}1}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times + \mathbf{M}_{\mathfrak{S}1}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times - t_1^{-1} \mathbf{h}_{(1)} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Второе неравенство получается из этого заменой индексов $1 \rightleftharpoons 2$, а также $t_+ \rightleftharpoons t_-$.

Неравенства (2.115) должны выполняться для всех мыслимых процессов, протекающих в простых оболочках, поэтому они будут играть существенную роль в дальнейших построениях.

2.10. Определяющие уравнения термоупругих оболочек

Определяющие уравнения, или уравнения состояния, служат для фиксации свойств материала. Будем говорить, что простая оболочка является термоупругой, если все функции состояния (внутренняя энергия, энтропия, тензоры усилий и моментов, тепловые потоки) зависят только от следующих параметров состояния:

$$\mathbf{A}^\times, \quad \mathbf{K}^\times, \quad t_1, \quad t_2, \quad \overset{\circ}{\nabla} t_1, \quad \overset{\circ}{\nabla} t_2. \quad (2.116)$$

Введем в рассмотрение свободную энергию Гельмгольца:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \Psi_\alpha = U_\alpha - S_\alpha t_\alpha \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.117)$$

Исключая из неравенств (2.115) внутреннюю энергию, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} & -\rho(\dot{\Psi}_1 + S_1 \dot{t}_1) + \mathbf{T}_{\mathfrak{S}1}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times + \mathbf{M}_{\mathfrak{S}1}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times - \\ & - \rho g_1 (t_1 - t_+) t_+^{-1} - \rho Q_1 (t_1 - t_2) t_2^{-1} + t_1^{-1} \mathbf{h}_{(1)} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Второе неравенство следует из этого после замены индексов $1 \rightleftharpoons 2$, а также $t_+ \rightleftharpoons t_-$.

По определению термоупругой оболочки все функции состояния зависят только от значений параметров состояния в данный момент времени, поэтому можно написать

$$\dot{\Psi}_\alpha = \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \mathbf{A}^\times} \right)^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times + \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \mathbf{K}^\times} \right)^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times + \sum_{\beta=1}^2 \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t_\beta} \dot{t}_\beta + \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \overset{\circ}{\nabla} t_\beta} \cdot \frac{\partial \overset{\circ}{\nabla} t_\beta}{\partial t} \right), \quad (2.119)$$

где производные по вектору вычисляются стандартным образом, а производные по тензору второго ранга определяются формулой

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial f}{\partial A_{ik}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = A_{ik}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}^i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}^k(\mathbf{x}). \quad (2.120)$$

Заметим, что принятое здесь определение отличается от определения производной Фреше операцией транспонирования, как это видно из уравнения(2.119).

Подставляя уравнение (2.119) в (2.118), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{T}_{\varepsilon 1} - \rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{A}^\times} \right)^\top \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times + \left(\mathbf{M}_{\varepsilon 1} - \rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{K}^\times} \right)^\top \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times - \rho \left(S_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1} \right) \dot{t}_1 - \rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_2} \dot{t}_2 - \\ & - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \overset{\circ}{\nabla} t_\beta} \cdot \frac{\partial \overset{\circ}{\nabla} t_\beta}{\partial t} - \rho g_1(t_1 + t_+) t_+^{-1} - \rho Q_1(t_1 - t_2) t_2^{-1} - t_1^{-1} \mathbf{h}_{(1)} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 \geq 0. \end{aligned}$$

В левой части этого неравенства стоит линейная форма скоростей, которая может быть неотрицательной тогда и только тогда, когда все коэффициенты при скоростях обращаются в нуль.

Поэтому получаем формулы

$$\mathbf{T}_{\varepsilon 1} = \rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{A}^\times}, \quad \mathbf{M}_{\varepsilon 1} = \rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{K}^\times}, \quad S_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_2} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \overset{\circ}{\nabla} t_\beta} = 0. \quad (2.121)$$

Аналогично получаем

$$\mathbf{T}_{\varepsilon 2} = \rho \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{A}^\times}, \quad \mathbf{M}_{\varepsilon 2} = \rho \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{K}^\times}, \quad S_2 = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \overset{\circ}{\nabla} t_\beta} = 0. \quad (2.122)$$

Из уравнений (2.121) и (2.122) следуют окончательные формулы

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}^\times}, \quad \mathbf{M}_\varepsilon = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}^\times}, \quad S_\alpha = -\frac{\partial \Psi}{\partial t_\alpha}. \quad (2.123)$$

Свободная энергия при этом не зависит от градиентов температур, а зависимость от самих температур подчинена ограничению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t_1 \partial t_2} = 0. \quad (2.124)$$

Соотношения (2.123) будем называть соотношениями Коши–Грина в теории простых оболочек. Для истинных тензоров усилий и моментов они, согласно (2.83) и (2.86), принимают вид

$$\mathbf{T} = \rho \nabla \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}^\times} \cdot \mathbf{P}^\top, \quad \mathbf{M} = \rho \nabla \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}^\times} \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (2.125)$$

Для тензоров Пиолы–Кирхгофа имеем

$$\mathbf{T}_\pi = \frac{\partial \rho_0 \Psi}{\partial \mathbf{A}^\times} \cdot \mathbf{P}^\top, \quad \mathbf{M}_\pi = \frac{\partial \rho_0 \Psi}{\partial \mathbf{K}^\times} \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (2.126)$$

После использования соотношений Коши–Грина неравенства (2.118) принимают вид

$$\begin{aligned} & -\rho g_1(t_1 - t_+) t_+^{-1} - \rho Q_1(t_1 - t_2) t_2^{-1} - t_1^{-1} \mathbf{h}_{(1)} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 \geq 0, \\ & -\rho g_2(t_2 - t_-) t_-^{-1} - \rho Q_2(t_2 - t_1) t_1^{-1} - t_2^{-1} \mathbf{h}_{(2)} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.127)$$

2.11. Уравнения распространения тепла

Для получения уравнений распространения тепла необходимо вновь вернуться к уравнениям баланса энергии (2.91). Левые части этих уравнений можно теперь записать в виде

$$\rho \dot{U}_\alpha - \mathbf{T}_{\mathfrak{E}\alpha}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times - \mathbf{M}_{\mathfrak{E}2}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times = \rho t_\alpha \dot{S}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.128)$$

Тогда (2.91) доставляют уравнения распространения тепла

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h}_{(\alpha)} = \rho(-t_\alpha \dot{S}_\alpha + g_{0\alpha} + g_\alpha + \mathbf{Q}_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.129)$$

Для нахождения температурных полей t_1 и t_2 необходимо задать определяющие уравнения для потоков тепла \mathbf{h}_α и тепловых источников g_α . В общем случае эта задача очень сложна и включает множество частных случаев, тесно связанных с конкретной спецификой задачи, поэтому ограничимся только простейшими уравнениями, которые примем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{(1)} &= -\gamma_1 \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 - \gamma_{12} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_2, & \mathbf{h}_{(2)} &= -\gamma_{21} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 - \gamma_2 \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_2, \\ Q_1 = -Q_2 &= -\gamma(t_1 - t_2), & g_1 &= -\beta_1(t_1 - t_+), & g_2 &= -\beta_2(t_1 - t_-), \end{aligned} \quad (2.130)$$

где тензоры второго ранга $\gamma_1, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_2$ и скаляры γ, β_1, β_2 не зависят от температур. Подставляя уравнение (2.130) в (2.127), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \rho\beta_1(t_1 - t_+)^2 t_+^{-1} + \rho\gamma(t_1 - t_2)^2 t_2^{-1} + t_1^{-1} \overset{\circ}{\nabla} t_1 \cdot \gamma_1 \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_{1+} \\ + t_1^{-1} \overset{\circ}{\nabla} t_1 \cdot \gamma_{12} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} \rho\beta_2(t_2 - t_-)^2 t_-^{-1} + \rho\gamma(t_1 - t_2)^2 t_1^{-1} + t_2^{-1} \overset{\circ}{\nabla} t_2 \cdot \gamma_2 \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_{2+} \\ + t_2^{-1} \overset{\circ}{\nabla} t_2 \cdot \gamma_{21} \cdot \overset{\circ}{\nabla} t_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Левая часть неравенства (2.131) линейна по $\overset{\circ}{\nabla} t_2$, поэтому она неотрицательна при произвольном $\overset{\circ}{\nabla} t_2$ только в том случае, когда $\gamma_{12} = 0$. Аналогично из неравенства (2.132) следует, что $\gamma_{21} = 0$. Поскольку переменные $(t_1 - t_+), (t_1 - t_2), (t_2 - t_-), \overset{\circ}{\nabla} t_1, \overset{\circ}{\nabla} t_2$ независимы, то для справедливости неравенств (2.131)–(2.132) необходимо, чтобы

$$\beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0, \quad (2.133)$$

а тензоры γ_1 и γ_2 должны быть плоскими и неотрицательными.

Вычисляя скорость изменения плотности энтропии, получаем

$$\rho \dot{S}_\alpha = -\rho \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial t_\alpha} = -\left(\frac{\partial \mathbf{T}_\mathfrak{E}}{\partial t_\alpha} \right)^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}}^\times - \left(\frac{\partial \mathbf{M}_\mathfrak{E}}{\partial t_\alpha} \right)^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{K}}^\times - \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t_\alpha^2} \frac{\partial t_\alpha}{\partial t}. \quad (2.134)$$

Здесь были использованы соотношения Коши–Грина. Подставляя выражения (2.134) и (2.130) в (2.129), приходим к системе двух уравнений относительно двух температур t_1 и t_2 . Причем, в эти уравнения будут входить также тензоры усилий и моментов и меры деформации, т. е. температурные и деформационные поля, вообще говоря, оказываются связанными.

2.12. О задании свободной энергии

Для получения замкнутой теории термоупругих простых оболочек необходимо задать свободную энергию как функцию параметров состояния \mathbf{A}^\times , \mathbf{K}^\times , t_1 и t_2 . Как было показано выше, она должна удовлетворять ограничению

$$\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{A}^\times, \mathbf{K}^\times, t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 0. \quad (2.135)$$

Если тензор $\Theta_2 - \Theta_1 \cdot \Theta_1^\top$ положительно определен, то уравнения движения (2.61) и (2.62) не налагают никаких ограничений на тензоры усилий и моментов — при любых их значениях, а также при любых ускорениях $\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{\Omega}$ можно подобрать такие поверхностные внешние усилия и моменты, что уравнения движения будут выполнены. Если простая оболочка моделирует оболочку постоянной толщины, то тензор $\Theta_2 - \Theta_1 \cdot \Theta_1^\top$ будет неотрицательным, но не положительным, что видно из уравнения (2.38). Далее из (2.41) следует, что тела — точки простой оболочки не чувствуют поворота вокруг оси \mathbf{D}_3 . Это означает, что простая оболочка из неполярного материала не способна сопротивляться повороту своих тел — точек вокруг оси $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t)$, и, следовательно, свободная энергия должна оставаться инвариантной относительно преобразования

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t), \quad (2.136)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ определен формулой (2.39).

При преобразовании (2.136) меры деформации переходят в следующие:

$$\mathbf{A}^\times = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \rightarrow \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t), \quad (2.137)$$

$$\mathbf{K}^\times = \mathbf{k} + \mathbf{F} = \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^\alpha \otimes [\partial_\alpha \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P}]_\times \rightarrow \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^\alpha \otimes [\partial_\alpha (\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}]_\times.$$

Можно доказать, что необходимыми и достаточными условиями указанной инвариантности Ψ являются условия, которые получаются следующим образом. Отсутствие реакции простой оболочки на поворот вокруг \mathbf{D}_3 означает, что

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{D}_3 = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_3 = 0. \quad (2.138)$$

Первое из этих условий есть ограничение на внешние нагрузки — оно аналогично невозможности приложения сосредоточенных моментов в пространственной теории упругости неполярной среды. Второе условие аналогично отсутствию момента вокруг нормали в классической теории оболочек. Второе из условий (2.138) можно записать в виде

$$\mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{d}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}^\times} \cdot \mathbf{d}_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{d}_3)} = 0. \quad (2.139)$$

Докажем теперь, что правая часть уравнения движения (2.62) ортогональна \mathbf{D}_3 . Для этого вспомним формулу (2.40) и запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \rho (\Theta_1 \cdot \mathbf{v} + \Theta_2 \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot + \rho \mathbf{v} \times \Theta_1^\top \cdot \mathbf{\Omega} &= -\frac{\rho}{\rho_0} \langle \tilde{\rho}_0 \mathbf{z} \rangle (\mathbf{D}_3 \times \mathbf{v}) \cdot + \\ &+ \frac{\rho}{\rho_0} \langle \tilde{\rho}_0 \mathbf{z}^2 \rangle [\mathbf{\Omega} - \mathbf{D}_3 (\mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{\Omega})] \cdot + \frac{\rho}{\rho_0} \langle \tilde{\rho}_0 \mathbf{z} \rangle \mathbf{v} \times (\mathbf{D}_3 \times \mathbf{\Omega}). \end{aligned}$$

Умножая теперь обе части этого равенства скалярно на \mathbf{D}_3 и учитывая выражение (2.10), получаем требуемое условие

$$[\rho(\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega})' + \rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Theta}_1^T \cdot \boldsymbol{\Omega}] \cdot \mathbf{D}_3 = 0. \quad (2.140)$$

Умножая теперь (2.62) скалярно на \mathbf{D}_3 и учитывая выражения (2.138) и (2.140), получаем

$$(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times) \cdot \mathbf{D}_3 = 0. \quad (2.141)$$

Вычисляя дивергенцию от второго условия (2.138), получаем

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_3) = (\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}_3 - \mathbf{M}_9^T \cdot \cdot (\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{c}) = 0, \quad (2.142)$$

где $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ — дискриминантный тензор несущей поверхности в отсчетной конфигурации. Теперь уравнение (2.141) с учетом (2.142), а также равенства

$$\mathbf{T}_\times \cdot \mathbf{D}_3 = \mathbf{T}_9^T \cdot \cdot (\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}) = 0,$$

можно записать в виде

$$\mathbf{M}_9^T \cdot \cdot (\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{T}_9^T \cdot \cdot (\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}) = 0. \quad (2.143)$$

Это так называемое шестое уравнение равновесия — оно вместе с условием (2.138) налагает ограничения на тензоры усилий и моментов, которые должны быть выполнены априорно. Вспоминая соотношения Коши–Грина (2.123), этому уравнению придаем вид

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}^\times} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}^\times} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{c}) = 0. \quad (2.144)$$

Условия (2.139) и (2.144) являются необходимыми и достаточными условиями инвариантности Ψ относительно преобразования (2.137). Принятым здесь способом получения этих условий мы хотели бы подчеркнуть, что полученные условия необходимы в любой теории оболочек, независимо от способа построения, в которой принимаются ограничения (2.138) и (2.143), т. е. почти во всех известных вариантах теории оболочек.

Свободная энергия рассматривается в пространстве четырнадцати переменных: двенадцати деформационных (по шесть компонент тензоров \mathbf{A}^\times и \mathbf{K}^\times , записанных в базисе $\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{d}^k$) и двух температур. На нее наложено четыре условия в виде одного уравнения второго порядка (2.135) и трех уравнений в частных производных первого порядка (2.139) и (2.144). Уравнение (2.135) не позволяет снизить числа независимых переменных, поскольку оно имеет решение вида

$$\Psi(\mathbf{A}^\times, \mathbf{K}^\times, t_1, t_2) = \Psi_1(\mathbf{A}^\times, \mathbf{K}^\times, t_1) + \Psi_2(\mathbf{A}^\times, \mathbf{K}^\times, t_2). \quad (2.145)$$

Уравнения (2.120) и (2.123) позволяют снизить число независимых переменных на три единицы. Для краткости температурные переменные пока опустим из рассмотрения, т. е. будем рассматривать свободную энергию в пространстве только деформационных переменных. Посмотрим, вдоль каких кривых в этом пространстве свободная энергия остается неизменной. Рассмотрим кривую $\mathbf{A}^\times(s)$, $\mathbf{K}^\times(s)$ и вычислим изменение свободной энергии вдоль этой кривой

$$\frac{d\Psi}{ds} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}^\times} \right)^T \cdot \cdot \frac{d\mathbf{A}^\times}{ds} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}^\times} \right)^T \cdot \cdot \frac{d\mathbf{K}^\times}{ds}. \quad (2.146)$$

Кривая называется интегральной для уравнения (2.144), если в силу этого уравнения значение свободной энергии вдоль нее остается постоянным. Рассмотрим кривую, являющуюся решением системы, называемой характеристической для уравнения (2.144):

$$\frac{d\mathbf{A}^\times}{ds} = \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}, \quad \frac{d\mathbf{K}^\times}{ds} = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{c}. \quad (2.147)$$

Подставляя уравнение (2.147) в (2.146) и учитывая уравнение (2.144), получаем, что вдоль кривой, определяемой уравнением (2.147), свободная энергия сохраняет постоянное значение, т. е. она является интегралом системы (2.147). Можно доказать, что полная система ([204]) двенадцатого порядка, каковой является (2.147), имеет не более одиннадцати функционально-независимых интегралов, а общий интеграл уравнения (2.144) можно представить в виде функции одиннадцати базисных интегралов (2.147). Найдем эти интегралы. Умножая обе части уравнений (2.147) скалярно на $\mathbf{n} = \mathbf{d}_3$, получаем

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{n}) = 0,$$

т. е. плоские векторы

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\gamma}_* = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{n}. \quad (2.148)$$

являются интегралами (2.147) — это доставляет четыре независимых интеграла. Первое из уравнений (2.147) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{A}^\times}{ds} = \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{c}, \quad \frac{d\mathbf{A}^{\times T}}{ds} = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^{\times T}, \quad (2.149)$$

где второе уравнение получено транспонированием первого. Умножая теперь первое уравнение этой системы на $\mathbf{A}^{\times T}$ справа, а второе — на \mathbf{A}^\times слева и складывая, получаем

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times T}) = 0,$$

т. е. плоский симметричный тензор

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times T} - \mathbf{a}) \quad (2.150)$$

является интегралом (2.147) — он доставляет еще три интеграла. Умножая теперь второе уравнение из (2.149) на $\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a}$ слева, а второе уравнение из (2.147) на $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times T}$ справа и складывая получившиеся уравнения, приходим к уравнению

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times T}) = 0,$$

т. е. тензор

$$\boldsymbol{\Phi}_* = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times T},$$

доставляет оставшиеся четыре интеграла. Для нас удобнее вместо $\boldsymbol{\Phi}_*$ ввести другой тензор

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times T} - \frac{1}{2}\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times T} - \frac{1}{2}\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}, \quad (2.151)$$

который, очевидно, также является интегралом системы (2.147). Итак, два тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\Phi}$, а также два вектора $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\gamma}_*$ доставляют одиннадцать функционально-независимых

интегралов системы (2.147). Произвольная дифференцируемая функция этих тензоров является интегралом уравнения (2.144).

Поэтому

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_*, t_1, t_2)$$

тождественно удовлетворяет шестому уравнению равновесия. Условие (2.149) показывает, что свободная энергия не зависит от вектора $\boldsymbol{\gamma}_*$. Окончательно получаем, что свободная энергия в термоупругих простых оболочках при ограничениях (2.138) и (2.143) зависит только от одиннадцати независимых переменных:

$$\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}, t_1, t_2. \quad (2.152)$$

Простейшее задание свободной энергии в этом случае может быть записано в виде полинома второй степени

$$\begin{aligned} \rho_0 \Psi = & \mathbf{T}_0 \cdot \cdot \mathbf{E} + \mathbf{M}_0^T \cdot \cdot \mathbf{\Phi} + \mathbf{N}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \mathbf{\Phi} + \frac{1}{2} \mathbf{\Phi} \cdot \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \mathbf{\Phi} + \\ & + \mathbf{E} \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{\Phi} \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{C}_4(t_1 - t_0) + \\ & + \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{C}_5(t_2 - t_0) + \mathbf{\Phi} \cdot \cdot [\mathbf{C}_6(t_1 - t_0) + \mathbf{C}_7(t_2 - t_0)] + \frac{1}{2} \alpha_1(t_1 - t_0)^2 + \frac{1}{2} \alpha_2(t_2 - t_0)^2, \end{aligned} \quad (2.153)$$

где тензоры четвертого ранга $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$, тензоры третьего ранга $\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2$, тензоры второго ранга $\mathbf{T}_0, \mathbf{M}_0, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6, \mathbf{C}_7$, вектор \mathbf{N}_0 и скаляры α_1, α_2 не зависят от температур, от деформаций и, следовательно, могут быть найдены по данным линейной теории. Это будет сделано в следующих разделах работы для конкретных случаев: однослойных оболочек из изотропного материала, двухслойных оболочек из ортотропного материала, трехслойных оболочек из изотропного материала и подкрепленных оболочек. Как видно из (2.153), даже простейшее представление свободной энергии остается довольно сложным. В конкретных случаях его можно будет существенно упростить. К сожалению, применимость (2.143) ограничена сравнительно малыми деформациями и поворотами. Чтобы установить область применимости (2.143), нужно было бы выписать неравенства Адамара и установить область изменения деформационных переменных, в которых неравенства Адамара выполнены. Исследование закритических состояний упругих оболочек возможно только в указанной области изменения деформационных переменных. Как известно, при нарушении условий Адамара существует бесконечно много решений нелинейных краевых задач, а строгий минимум потенциальной энергии достигается на нигде не дифференцируемых решениях [69]. Здесь не будет анализироваться эта проблема: все известные работы по нелинейной теории оболочек основаны на представлении энергии в виде (2.153), поэтому и мы ограничимся этим случаем. Кроме того, для многих практических ситуаций аппроксимация (2.153) оказывается вполне приемлемой, поскольку тонкие оболочки теряют устойчивость задолго до того, как будут нарушаться условия Адамара.

Тензоры $\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}$ будем называть приведенными тензорами деформации и присвоим им следующие наименования, согласующиеся с принятыми в литературе: \mathbf{E} — тензор растяжения – сдвига несущей поверхности, $\mathbf{\Phi}$ — тензор изгиба – кручения, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор деформации поперечного сдвига. Все эти тензоры являются плоскими. Дальнейшее продвижение вперед возможно только при большей конкретизации физических объектов, моделью которых служит простая оболочка. Этому посвящены следующие разделы работы.

2.13. Переход к теории типа Лява

Выше была представлена нелинейная теория оболочек типа Тимошенко, т. е. теория, учитывающая деформацию поперечного сдвига. Такая теория, как известно, оказывается необходимой, когда оболочка имеет малую жесткость на поперечный сдвиг — этот случай реализуется в многослойных оболочках. Для однослойных оболочек малой толщины достаточной оказывается теория типа Лява, в которой жесткость на поперечный сдвиг считается бесконечно большой, а вектор деформации поперечного сдвига полагается равным нулю — одна из гипотез Кирхгофа–Лява:

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n} \equiv \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{D}_3 = \mathbf{r}^\alpha (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{D}_3) = 0. \quad (2.154)$$

Из этой формулы видно, что \mathbf{D}_3 ортогонален к касательной плоскости деформированной несущей поверхности, т. е. можно принять

$$\mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t), \quad (2.155)$$

где $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ — нормаль к деформированной несущей поверхности. Дифференцируя это равенство по x^α , получаем

$$\partial_\alpha \mathbf{D}_3 = \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{D}_3 \Rightarrow \partial_\alpha \mathbf{N} = \mathbf{K}_\alpha \times \mathbf{N} \Rightarrow \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{N} = \mathbf{K} \times \mathbf{N} = -\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}, \quad (2.156)$$

где \mathbf{V} и \mathbf{C} — второй фундаментальный и дискриминантный тензоры несущей поверхности, соответственно. Таким образом, плоская часть тензора \mathbf{K} выражается через \mathbf{V} :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}, \quad (\mathbf{C}^2 = -\mathbf{A}). \quad (2.157)$$

Тензор деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ в теории типа Лява остается без изменений:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^\top - \mathbf{a}). \quad (2.158)$$

Представление для второго тензора деформации (2.151) может быть переписано в эквивалентной форме:

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times\top} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times\top} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{n}) \otimes \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.159)$$

где последнее слагаемое исчезает при переходе к теории типа Лява. Можно доказать формулу

$$\mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times\top} = -\nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{R}^\top = -(\mathbf{V} \cdot \mathbf{C})^\times. \quad (2.160)$$

Эта формула справедлива только в теории типа Лява, поскольку было использовано равенство (2.157). Окончательно тензор изгиба – кручения в теории типа Лява принимает вид:

$$\boldsymbol{\Phi} = -(\mathbf{V} \cdot \mathbf{C})^\times + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2.161)$$

Смысл этого тензора не требует пояснений.

2.14. Изгиб напряженной мембраны распределенным нормальным давлением

Задача об изгибе мембраны, закрепленной по контуру и нагруженной “мертвой” нагрузкой (собственным весом), была рассмотрена У. Койтером (1975г.) В конечном итоге все искомые величины определялись через решение нелинейного уравнения второго порядка

$$\rho^2 \frac{d^2 s}{d\rho^2} + 3\rho \frac{ds}{d\rho} + \frac{\rho^2}{8s^2} = 0, \quad (2.162)$$

где s — меридианальное напряжение; ρ — радиальная координата (обе величины безразмерные). В последней книге А.И. Лурье (1980, с. 210–215) изложено другое решение этой же задачи и отмечается, что “более содержательной” была бы задача о нагружении не мертвой нагрузкой, а следящей, т. е. распределенным нормальным давлением. Именно последней задаче и посвящен настоящий раздел. Причем, ниже приводится аналитическое, а не численное, как у У. Койтера и А.И. Лурье, решение этой задачи.

Рассмотрим круглую мембрану (тонкую металлическую плиту), защемленную по контуру и нагруженную равномерным давлением. В этом случае поверхностная нагрузка имеет вид

$$\rho \mathbf{F} = -p \mathbf{N}, \quad (2.163)$$

где \mathbf{N} — нормаль к деформированной поверхности мембраны. Поскольку мембрана предполагается достаточно жесткой на растяжение, то для энергии деформации допустимо ограничиться квадратичным приближением (2.153), но для эластомеров такое представление мало пригодно.

$$\rho_0 \Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu \varepsilon_1 \varepsilon_2), \quad (2.164)$$

где h , E , ν — толщина мембраны; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала мембраны.

Тензор деформации (2.150) представим в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (2.165)$$

$$\varepsilon_1 = u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2), \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r} \left(1 + \frac{u}{2r}\right),$$

где u, w — радиальное и нормальное смещения точек мембраны; $0 \leq r \leq r_0$ — радиальная координата; штрих есть производная по r ; ε_1 и ε_2 — главные растяжения мембраны; \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — орты полярной системы координат (по деформации). Для получения разрешающих уравнений можно использовать уравнения, полученные выше в этой главе, но проще воспользоваться вариационным подходом. Запишем уравнение баланса энергии (2.74) применительно к мембране:

$$\delta \int_{(\sigma)} \rho_0 \Psi d\sigma = - \int_{(\sigma)} \sqrt{\frac{A}{a}} p \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{R} d\sigma, \quad d\sigma = r dr d\varphi. \quad (2.166)$$

Здесь интегрирование ведется по отсчетной конфигурации, чем и объясняется наличие множителя $\sqrt{\frac{A}{a}}$.

Легко доказываются формулы

$$\sqrt{\frac{A}{a}} \mathbf{N} = \frac{f}{r} (-w' \mathbf{e}_1 + f' \mathbf{n}), \quad \delta \mathbf{R} = \delta u \mathbf{e}_1 + \delta u \mathbf{e}, \quad f \equiv r + u, \quad (2.167)$$

где \mathbf{u} , w — радиальное и нормальное смещение точек мембраны.

Подставляя уравнение (2.167) в (2.166) и преобразуя, получаем

$$\delta \Phi = 0, \quad \Phi \equiv \int_0^{r_0} \left[r(\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + 2\nu \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2) - \frac{\alpha}{r_0} f^2 w^1 \right] dr, \quad (2.168)$$

где $\alpha \equiv (1 - \nu^2) p r_0 / E h$ — параметр, считающийся в дальнейшем малым.

Итак, дело свелось к отысканию стационарной точки (в данном случае — точки минимума) функционала Φ , определенного на функциях, удовлетворяющих условиям задачи

$$r = r_0 : u = w = 0. \quad (2.169)$$

Уравнения Эйлера для функционала Φ имеют вид

$$(r t_1 f')' - \frac{f}{r} \left(t_2 - \frac{\alpha r}{r_0} w' \right) = 0, \quad \left(2r t_1 w' - \frac{\alpha}{r_0} f^2 \right)' = 0, \quad (2.170)$$

где $t_1 = \mathcal{E}_1 + \nu \mathcal{E}_2$, $t_2 = \mathcal{E}_2 + \nu \mathcal{E}_1$ — безразмерные радиальные и окружное усилия, соответственно.

Из второго уравнения системы (2.170) имеем интеграл

$$2r t_1 w' - \alpha r_0^{-1} f^2 = K = \text{const.}$$

Поскольку при $r = 0$ усилие t_1 ограничено, а $f = 0$, то $K = 0$. Теперь получаем, что $t_1 w' > 0$ при $0 \leq r \leq r_0$.

Таким образом, разрешающая система уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (r t_1 f')' - f r^{-1} (t_2 - \alpha r r_0^{-1} w') &= 0, & 2r_0 r t_1 w' &= \alpha f^2, \\ t_1 - t_2 \nu &= (1 - \nu^2) \left[u' + \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2) \right], & t_2 - \nu t_1 &= \frac{1 - \nu^2}{r} \left(u + \frac{u^2}{2r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.171)$$

Сделаем замену искомым и независимой переменных

$$t_\alpha = \beta^{2/3} s_\alpha, \quad u = r_0 \beta^{2/3} \tilde{u}, \quad w = r_0 \beta^{1/3} \tilde{w}, \quad r = \alpha y, \quad \beta \equiv \sqrt{1 - \nu^2} \alpha. \quad (2.172)$$

Тогда вместо (2.171) получим систему вида

$$\begin{aligned} [y s_1 (1 + \beta^{2/3} \tilde{u}')]' - \left(1 + \beta^{2/3} \frac{\tilde{u}}{y} \right) \left(s_2 - \frac{\beta^{2/3}}{1 - \nu^2} \frac{w'}{y} \right) &= 0, \\ s_1 \tilde{w}' - \frac{y}{2(1 - \nu^2)} \left(1 + \beta^{2/3} \frac{\tilde{u}}{y} \right)^2 &= 0, \\ \tilde{u}' + \frac{1}{2} (\tilde{w}'^2 + \beta^{2/3} \tilde{u}'^2) &= (1 - \nu^2)^{-1} (s_1 - \nu s_2), \\ (1 - \nu^2) (2y \tilde{u} + \beta^{2/3} \tilde{u}^2) &= 2y^2 (s_2 - \nu s_1). \end{aligned} \quad (2.173)$$

Полученная нелинейная система содержит малый параметр $\beta^{2/3}$. Ее решение можно искать в виде ряда по степеням параметра $\beta^{2/3}$. Основным интерес представляют главные члены этих разложений, которые, очевидно, находятся из уравнения (2.173) при отбрасывании слагаемых, содержащих $\beta^{2/3}$. В результате получим следующую упрощенную, но по-прежнему нелинейную систему вида

$$\begin{aligned} (ys_1)' - s_2 = 0, \quad 2(1 - \nu^2)s_1\tilde{w}' = y, \quad (1 - \nu^2)\tilde{u} = y(s_2 - \nu s_1), \\ \tilde{u}' + \frac{1}{2}\tilde{w}'^2 = \frac{s_1 - \nu s_2}{1 - \nu^2}. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Исключая функции $\tilde{u}, \tilde{w}', s_2$, приходим к нелинейному уравнению второго порядка типа Эмдена–Фаулера для функции s_1

$$y^2 s_1'' + 3y s_1' + \frac{y^2}{8s_1^2} = 0, \quad s_1 = s_1(y), \quad (2.175)$$

т. е. для главного члена разложения усилия t_1 получили то же уравнение (2.162), что и У. Койтер. В общем, этого и следовало ожидать из физических соображений. Остальные искомые функции находятся по усилию s_1 следующим образом:

$$s_2 = (ys_1)', \quad \tilde{w}' = \frac{y}{2\sqrt{(1 - \nu^2)}s_1}, \quad (1 - \nu^2)\tilde{u} = y[(ys_1)' - \nu s_1]. \quad (2.176)$$

Для нахождения краевых условий для s_1 нужно воспользоваться условием (2.169). Тогда с учетом уравнения (2.176) получим

$$r = r_0 \quad \text{или} \quad y = 1: \quad s_1' + (1 - \nu)s_1 = 0. \quad (2.177)$$

Кроме того, нужно потребовать ограниченности в нуле усилия s_1 . Сформулируем несколько утверждений о свойствах решения уравнения (2.175) при условиях (2.177) и $|s_1(0)| < \infty$.

Утверждение 1. Функция $s_1(y)$ является монотонно убывающей при изменении y от 0 до 1. Причем $s_1(y) > 0$.

Доказательство. Примем обозначения $s \equiv s_1(0)$, $s_* \equiv s_1(1)$. Уравнение (2.175) и условие $|s_1(0)| < \infty$ эквивалентны следующему интегральному уравнению:

$$s - s_1(y) = \frac{y^2}{32} H(y), \quad H(y) \equiv \int_0^1 \frac{(1 - \tau) d\tau}{s_1^2(y\sqrt{\tau})}. \quad (2.178)$$

Отсюда получаем, что $s_1(y) < s$ и

$$s_1'(y) = -\frac{y}{16} \int_0^1 \frac{\tau d\tau}{s_1^2(y\sqrt{\tau})} < 0, \quad (2.179)$$

т. е. $s_1(y)$ — монотонно убывающая функция.

Подставляя (2.179) в (2.177), получаем

$$(1 - \nu)s_* = \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{\tau d\tau}{s_1^2(y\sqrt{\tau})} > 0.$$

Таким образом, **утверждение 1** доказано:

$$0 < s_* \leq s_1(y) \leq s, \quad s'_1(y) < 0. \quad (2.180)$$

Утверждение 2. Справедливы неравенства

$$1 < \frac{s}{s_*} < \frac{3-\nu}{2}, \quad \frac{3-\nu}{1-\nu} < (4s)^3 < \frac{(3-\nu)^2}{2(1-\nu)}. \quad (2.181)$$

Доказательство. Краевое условие (2.177) с учетом (2.178) записывается в виде

$$32s = H_0 + \frac{1+\nu}{1-\nu}H_1, \quad H_\alpha \equiv \int_0^1 \frac{\tau^\alpha d\tau}{s_1^2(y\sqrt{\tau})}, \quad \alpha = 0, 1. \quad (2.182)$$

Кроме того, из уравнений (2.178) вытекает равенство

$$32(s - s_*) = H_0 - H_1. \quad (2.183)$$

По второй теореме о среднем для интегралов имеем

$$H_1 = \gamma H_0, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Учитывая, что $s_1(y)$ — монотонно убывающая функция, получаем для γ более строгое неравенство

$$1/2 < \gamma < 1. \quad (2.184)$$

Теперь с учетом равенств (2.182) и (2.183) получаем соотношение

$$\frac{s}{s_*} = \frac{1+\nu}{2} + \frac{1-\nu}{2\gamma} \Rightarrow 1 < \frac{s}{s_*} < \frac{3-\nu}{2}.$$

Это первое из неравенств (2.181). Второе неравенство немедленно следует из (2.182) и первого из неравенств (2.181). Действительно, (2.182) влечет за собой равенство

$$32s = \frac{1-\nu + (1+\nu)\gamma}{1-\nu} H_0 \Rightarrow 2 \frac{1-\nu + (1+\nu)\gamma}{1-\nu} < (4s)^3 < \frac{1-\nu + (1+\nu)\gamma}{1-\nu} \frac{s^2}{s_*^2}.$$

Здесь были использованы оценки

$$s^{-2} < H_0 < s_*^{-2}.$$

Используя теперь неравенство (2.184) и первое из неравенств (2.181), получаем и второе неравенство (2.181).

Утверждение 3. Решение уравнения (2.175), удовлетворяющее условию (2.177) и ограниченное в центре мембраны, существует, и единственно.

Доказательство. Введем новую независимую переменную

$$\xi = \sqrt{q}y, \quad q = (4s)^{-3}, \quad s_1(q^{-1/2}\xi) \equiv sF(\xi). \quad (2.185)$$

Поскольку $0 < s < \infty$, то указанная замена допустима. Тогда уравнение (2.175) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \xi^3 \frac{dF}{d\xi} + \frac{8}{F^2} = 0, \quad F(0) = 1. \quad (2.186)$$

Решение последней задачи ищем в виде ряда

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^{2k}, \quad a_0 \equiv 1, \quad (2.187)$$

причем нечетные степени, очевидно, не могут входить в это разложение. Переменная ξ^2 меняется в интервале

$$0 \leq \xi^2 \leq \frac{1}{(4s)^3} < \left(\frac{1-\nu}{3-\nu} \right) \leq \frac{1}{3}, \quad \left(0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \right). \quad (2.188)$$

Предполагая сходимость разложения (2.187) вместе с первыми двумя производными в интервале (2.188) и подставляя его в уравнение (2.186), приходим к линейной системе для определения коэффициентов a_k . Упомянутая система имеет единственное решение, при использовании формул

$$a_{n+1} = -\frac{2bn}{(n+1)(n+2)}, \quad b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k c_{n-k}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}, \quad (2.189)$$

$$a_0 = b_0 = c_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Исследуем теперь сходимость ряда (2.187). Согласно (2.189) имеем формулы

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n+3} \left(1 + \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} \right), \quad \left| \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} \right| < 1, 2.$$

Последнее неравенство справедливо при $n \geq 2$ и получено в результате численного расчета по формулам (2.189), причем с ростом n отношение $(b_{n+1} - b_n)/b_n$ убывает, но весьма медленно. Например, $(b_3 - b_2)/b_2 = 1,179$; $(b_{12} - b_{11})/b_{11} = 1,146$; $(b_{24} - b_{23})/b_{23} = 1,130$.

Таким образом, имеем неравенства

$$|a_n| < 2, 2^n; \quad |b_n| < 2, 2^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и ряд (2.187) сходится, если

$$2, 2\xi^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \xi^2 < 0,4545.$$

Поэтому в интервале (2.188) обсуждаемый ряд сходится вместе со всеми производными конечного порядка, и его подстановка в уравнение (2.186) оправдана. Теперь вопрос о единственности и существовании решения задач (2.175) и (2.177) сводится к аналогичной проблеме для числа $s = s_1(0)$.

Перепишем краевые условия (2.182) в виде

$$\frac{1}{2} = \int_0^q \frac{d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{q} \int_0^q \frac{\tau d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})}, \quad q \equiv \frac{1}{(4s)^3}. \quad (2.190)$$

Правая часть этого равенства, обозначаемая через $P(q)$, есть монотонно возрастающая функция. Действительно, вычисляя производную, имеем

$$\frac{dP}{dq} = \frac{1}{F^2(\sqrt{q})} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{F^2(\sqrt{q})} - \frac{1}{q^2} \int_0^q \frac{\tau d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})} \right] > 0,$$

Таблица 2.1:

ν	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$q \cdot 10^4$	2350	2292	2231	2167	2099	2027	1950	1869	1783	1690	1591
$q_* \cdot 10^4$	2357	2305	2249	2187	2119	2045	1966	1880	1788	1688	1581

так как выражение в квадратных скобках положительно в силу очевидной оценки

$$\frac{1}{q} \int_0^q \frac{\tau d\tau}{F^2(\sqrt{\tau})} < \frac{1}{2} F^{-2}(\sqrt{q}).$$

Поскольку $P(0) = 0$ и $P'(q) > 0$, то существует единственное решение уравнения (2.190). Его численный поиск не представляет труда, поскольку $F(\xi)$ — известна, а величину q нужно искать в сравнительно узком интервале (2.181).

Решения уравнения (2.190) для различных значений ν приводятся в таблице 2.1.

Из таблицы видно, что для инженерных расчетов допустимо пользоваться и аппроксимирующей формулой

$$q_* = \frac{1}{(4s)^3} = \frac{(1-\nu)\sqrt{2+\nu}}{2(3-\nu)} \Rightarrow s_1(0) \simeq \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{2(3-\nu)}{(1-\nu)\sqrt{2+\nu}}}. \quad (2.191)$$

После определения q радиальное усилие в мембране определяется по формуле

$$s_1(y) = \frac{1}{4q^{1/3}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k y^{2k}. \quad (2.192)$$

Таблица 2.2:

k	$-a_k$	b_k	$d_k/d_{(k+1)}$	k	$-a_k$	b_k	$d_k/d_{(k+1)}$
2	0,666666	0,433333	0,555555	14	196,560	44209,4	27,2361
3	0,722222	9,44444	0,486111	15	368,4110	94625,9	47,2955
4	0,844444	20,55555	0,504629	16	695,779	202397,0	83,1894
5	1,37037	44,6296	0,590792	17	1322,86	432640,0	137,983
6	2,37037	96,6670	0,756938	18	2530,06	924270,0	265,881
7	3,45239	208,934	1,03916	19	4864,57	1973530,0	481,977
8	5,80371	450,747	1,55555	20	9397,74	4211900,0	880,697
9	10,0166	970,867	2,27659	21	18233,3	8985030,0	1620,86
10	17,6521	2088,23	3,56354	22	35513,9	19159400,0	3002,53
11	31,6399	4486,06	5,73859	23	69418,1	40839400,0	5595,02
12	57,5136	9626,82	9,46237	24	136131,0	87020700,0	11482,5
13	105,789	20638,8	15,9173	25	267756,0		

Остальные величины выражаются через $s_1(y)$. Например, для нормального прогиба мембраны имеем формулу

$$\frac{w}{h} = - \left(\frac{P R^4}{E h^4} \right)^{1/3} \sqrt[3]{q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k+1} q^k (1 - y^2 y^{2k}). \quad (2.193)$$

Представление о коэффициентах \mathbf{a}_k и \mathbf{d}_k дает таблица 2.2. Численные иллюстрации будут приведены в следующем разделе.

В заключение заметим, что в работах Н.Ф. Морозова [140] и Н.Ф. Морозова и Л.С. Срубщика [141] было дано качественное исследование уравнения (2.162). Изложенное выше похоже на то, что сделано в работах [140, 141], но, как нам кажется, проще и полнее.

2.15. Изгиб круглой пластинки при больших перемещениях

В предыдущем разделе была рассмотрена безмоментная теория тонкой пластины и было показано, что при выполнении условия

$$\left| \frac{pR}{Eh} \right| \ll 1 \quad (2.194)$$

задача сводится к интегрированию уравнения типа Эмдена–Фаулера (2.162). При этом для главного члена оказалось несущественным то обстоятельство, что давление является следящей нагрузкой. Уравнение (2.162), но без явной записи ограничения (2.194) может быть получено и из классической теории Маргерра–Власова. Именно оно и служило объектом исследований в работах Н.Ф. Морозова.

Можно показать, что при выполнении условия (2.194) уравнения Маргерра–Власова могут быть получены из предложенной в данной работе теории, поэтому для главных членов разложения можно выписать хорошо известную систему уравнений, например из книги А.С. Вольмира (1956 г.). Она имеет вид

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 t_1}{dr^2} + 3r \frac{dt_1}{dr} &= -\frac{1-\nu^2}{2} \vartheta^2, \quad \vartheta = \frac{dw}{dr}, \quad t_2 = \frac{d}{dr}(rt_1), \\ \frac{h^2}{12} \left(\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} \right) &= -\frac{pr(1-\nu^2)}{2Eh} + t_1 \vartheta, \\ t_1 = \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, \quad t_2 = \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 &= \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \vartheta^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r}. \end{aligned} \quad (2.195)$$

В этой системе принято: p — поперечное давление; u, w — радиальный и нормальный прогибы; t_1 и t_2 — радиальное и окружное безразмерные усилия; ϑ — угол поворота; h — толщина пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $0 \leq r \leq R$ — радиальная координата; R — радиус пластины. Здесь незначительно изменены обозначения, принятые в предыдущем разделе.

Цель данного раздела состоит в том, чтобы дать полное решение задачи (2.195) при краевых условиях

$$r = R : u = w = 0, \quad \vartheta = 0. \quad (2.196)$$

В частности, мы хотим выяснить влияние условий закрепления на величину нормального прогиба в центре пластины. Задачу (2.195)–(2.196) удобно преобразовать к другой форме. Для этого введем замену искомого и независимой переменных

$$\begin{aligned} t_1 = \beta^{2/3} s, \quad t_2 = \beta^{2/3} s_2, \quad u = R\beta^{2/3} \mathbf{u}, \quad w = R\beta^{1/3} \mathbf{W}, \\ \vartheta = \beta^{1/3} \theta, \quad r = R\rho, \quad \beta \equiv (1-\nu^2)^{3/2} pR/Eh. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Эта замена тождественна (2.162), но для преобразования (2.195) здесь не требуется малости β . Теперь система (2.195) может быть переписана в виде

$$\rho^2 s'' + 3\rho s' = -\frac{1-\nu^2}{2} \theta^2, \quad ()' \equiv \frac{d}{d\rho}, \quad (2.198)$$

$$\varepsilon^2(\theta'' + \frac{1}{\rho}\theta' - \frac{1}{\rho^2}\theta) = s\theta - \frac{\rho}{2\sqrt{1-\nu^2}}, \quad s_2 = (\rho s)', \quad W' = \theta, \quad (2.199)$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{h^2}{12R^2}\beta^{-2/3} = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{E h^4}{p R^4} \right)^{2/3}. \quad (2.200)$$

Согласно условий (2.194), параметр β должен быть малым. Это достигается при малых значениях давления. При очень малых значениях параметра β справедлива линейная теория и параметр ε^2 не мал. Этот случай для нас не интересен, поскольку он давно изучен.

Важное значение имеет случай, когда

$$\beta^{2/3} \ll 1, \quad \varepsilon^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{h^2}{12R^2} \ll \beta^{2/3} \ll 1. \quad (2.201)$$

Последнее неравенство налагает на давление p ограничения как сверху, так и снизу: $|p|$ не может быть слишком малым или слишком большим. Именно этот случай и будет исследован ниже.

В систему (2.198) входят две неизвестные функции: s и θ — радиальное усилие и угол поворота, которые должны удовлетворять условиям

$$\rho = 1: \quad s' + (1-\nu)s = 0, \quad \theta = 0. \quad (2.202)$$

Нормальный прогиб находится через угол поворота по формуле

$$W = \int_{\rho}^1 \theta(\tau) d\tau \quad (2.203)$$

и удовлетворяет краевому условию (2.196).

Решение задачи (2.198), (2.202) ищем в виде

$$s = s_0 + s_1, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1, \quad (2.204)$$

где s_0 и θ_0 суть решения вырожденной ($\varepsilon = 0$) системы (2.198), удовлетворяющие первому из условий (2.202):

$$\rho^2 s_0'' + 3\rho s_0' + \frac{\rho^2}{(8s_0^2)} = 0, \quad \theta_0 = \frac{\rho}{2\sqrt{1-\nu^2}} \frac{1}{s_0}, \quad (2.205)$$

$$\rho = 1: \quad s_0' + (s_0 - \nu)s_0 = 0. \quad (2.206)$$

Решение этой задачи уже было найдено в предыдущем параграфе. Функции s_1 и θ_1 подчиняются уравнениям

$$s_1(p) = -\frac{1}{4} \int_0^1 \left[\left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \tau \right) f(\sqrt{\tau}) - \rho^2 (1-\tau) f(\rho\sqrt{\tau}) \right] d\tau, \quad (2.207)$$

$$\varepsilon^2 \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \theta_1 - s_0 \theta_1 = (\theta_0 + \theta_1) s_1 - \varepsilon^2 \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \theta_0,$$

$$f(p) \equiv -\frac{1-\nu^2}{2} \theta_1(\rho) [2\theta_0(\rho) + \theta_1(\rho)].$$

Функция $s_1(\rho)$ при произвольно заданных θ_0 и θ_1 удовлетворяет краевому условию (2.206), если она определена согласно первому из уравнений (2.207). Второе уравнение системы (2.207), в котором $s_1(\rho)$ выражено через $\theta_1(\rho)$, есть интегро – дифференциальное уравнение для определения θ_1 . Причем $\theta_1(\rho)$ должна удовлетворять условию

$$\rho = 1: \quad \theta_1(1) = -\theta_0(1). \quad (2.208)$$

Решение системы (2.207) существенно зависит от параметра ε^2 и свойств решения безмоментной задачи. Как было установлено в предыдущем разделе, функция s_0 удовлетворяет условию

$$0 < b \equiv s_0(1) \leq s_0(\rho). \quad (2.209)$$

Примем, что величина $\varepsilon/\sqrt{b} \ll 1$ и эффектами порядка $O(\varepsilon^2)$ можно пренебрегать по сравнению с единицей. Тогда слагаемое $\varepsilon^2 L\theta_0$ в правой части (2.207), очевидно, можно отбросить, по сравнению со слагаемым $s_0\theta_1$ (см. условие (2.208)). После упомянутого отбрасывания становится очевидным, что функция θ_1 есть функция типа пограничного слоя нулевого порядка [60]. Отсюда из первого уравнения системы (2.207) следует, что $s_1(\rho)$ также является функцией типа пограничного слоя, но уже второго порядка, поэтому и слагаемое $(\theta_0 + \theta_1)s_1$ в правой части (2.207) имеет порядок, по крайней мере, $O(\varepsilon^2)$, и его также можно отбросить. В результате для функции $\theta_1(\rho)$ получаем линейную краевую задачу

$$\varepsilon^2 \left(\theta_1'' + \frac{1}{\rho} \theta_1' - \frac{1}{\rho^2} \theta_1 \right) - s_0(\rho) \theta_1(\rho) = 0, \quad \theta_1(1) = -\theta_0(1). \quad (2.210)$$

Решение этой задачи легко находится и имеет вид

$$\theta_1(\rho) = -\theta_0(1) \rho g(\rho, \varepsilon) \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\rho}^1 \sqrt{s_0(\tau)} d\tau \right] + O(\varepsilon^2), \quad (2.211)$$

где функция $g(\rho, \varepsilon)$ имеет вид

$$g(\rho, \varepsilon) = \exp \int_{\rho}^1 \frac{6s_0(\tau) + \tau s_0'(\tau)}{6\varepsilon \sqrt{s_0(\tau)} + 4\tau s_0(\tau)} d\tau \quad (2.212)$$

и для всех значений ρ удовлетворяет неравенству

$$1 \ll g(\rho, \varepsilon) \ll \left(\frac{3\varepsilon + 2\sqrt{b}}{3\varepsilon + \rho 2\sqrt{b}} \right)^{\frac{3a}{2b}}, \quad a = s_0(0), \quad b = s_0(1). \quad (2.213)$$

Из формул (2.211)–(2.213) вытекает, что функция $\theta_1(\rho)$ действительно является функцией типа пограничного слоя нулевого порядка. Следовательно, все приведенные выше рассуждения правомерны. Для практических расчетов часто допустимо принимать $g(\rho, \varepsilon) = 1$, но в этом случае погрешность представления (2.211) будет иметь порядок $O(\varepsilon)$, а не $O(\varepsilon^2)$. Специфичность формулы (2.211) объясняется тем, что $\rho = 0$ есть особая точка уравнения (2.210).

Подведем итоги. Полное решение задачи об изгибе гибкой пластины давлением, удовлетворяющем неравенству (2.201), представимо в виде суперпозиции мембранного решения и краевого эффекта. Окончательные формулы имеют вид

$$s(\rho) = s_0(\rho) + O(\varepsilon^2), \quad s_2(\rho) = (\rho s_0)' + \rho s_1'(\rho) + O(\varepsilon^2),$$

$$\theta(\rho) = \frac{\rho}{2\sqrt{1-\nu^2}} \left[\frac{1}{s_0(\rho)} - \frac{1}{s_0(1)} g(\rho, \varepsilon) \exp \left(-\frac{1}{3} \int_{\rho}^1 \sqrt{s_0(\tau)} d\tau \right) + O(\varepsilon^2) \right], \quad (2.214)$$

причем последнее выражение можно дифференцировать без увеличения погрешности. В формулах (2.214) функция $s'_1(\rho)$ вычисляется согласно (2.207) по формуле

$$s'_1(\rho) = \frac{1}{2}\rho \int_0^1 \tau f(\rho\sqrt{\tau}) d\tau,$$

где $f(\rho)$ дается расшифровкой к уравнениям (2.207), причем в $f(\rho)$ можно представлять $\theta_1(\rho)$ при $g(\rho, \varepsilon) = 1$. Поскольку вычисление перемещений через функции (2.214) не требует дифференцирования, то они определяются с погрешностью $O(\varepsilon^2)$.

В заключение рассмотрим численный пример, взятый из книги [168], где приведено численное решение задачи (2.195)–(2.196). Пластина радиуса 100 мм и толщиной 0,4 мм выполнена из сплава с параметрами $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$. Нагрузка — поперечное давление $p = 0,04$ МПа.

Выписываем неравенство (2.201) для данной задачи

$$\frac{h^2}{12R^2} = 1,333 \cdot 10^{-6} \ll \beta^{2/3} = 1,196 \cdot 10^{-3} \ll 1.$$

Можно считать, что это сильное неравенство выполнено. Параметр ε имеет величину

$$\varepsilon^2 = 1,115 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon = 0,0334.$$

Судить о малости этого параметра можно не только в сравнении с числом $b = s_0(1)$. По формуле (2.192) имеем

$$s_0(1) = \frac{1}{4\sqrt[3]{q}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k; \quad q = 0,195 \Rightarrow s_0(1) = 0,3353; \quad s_0(0) = 0,4311. \quad (2.215)$$

Поэтому величину $\varepsilon/\sqrt{s_0(1)} = 0,0577$ нельзя считать пренебрежительно малой, однако квадратами ее можно пренебрегать. Это означает, что радиальное усилие достаточно точно определяется по безмоментной теории

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} t_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \beta^{2/3} s_0 \Rightarrow h^{-1} T_1(0) = 0,4311 \sqrt[3]{E \left(\frac{\rho R}{h} \right)^2}. \quad (2.216)$$

Теперь вычислим нормальный прогиб в центре пластины. Согласно формулам (2.203) и (2.214), имеем

$$w = w_0 + w_1 = R\beta^{1/3} \int_{\rho}^1 [\theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)] d\tau,$$

где w_0 — прогиб по безмоментной теории; w_1 — добавка, обусловленная защемлением края. По формуле (2.193) имеем

$$w_0(0) = 0,6512 \left(\frac{pR^4}{Eh^4} \right)^{1/3} h = 5,901h = 2,3604 \text{ мм}. \quad (2.217)$$

Заметим, что в этом разделе изменено положительное направление нормали по сравнению с предыдущим разделом. Это сделано для удобства сравнения с другими авторами.

Для $w_1(0)$ легко выводится формула

$$\frac{w_1(0)}{h} = -\frac{1}{2\sqrt{12(1-\nu^2)}} b^{-3/2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{b}}\right) + O\left(\varepsilon^3 \beta^{1/3} \frac{R}{h}\right) = -0,734, \quad (2.218)$$

где $b \equiv s_0(1)$.

Общий прогиб в центре имеет величину

$$w(0) = w_0(0) + w_1(0) = 2,3604 - 0,734h = 2,07 \text{ мм}. \quad (2.219)$$

Сравним полученные данные с известными. В справочнике [39] находим формулы для безмоментной теории

$$w_0(0) = 0,662 \left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)^{1/3} h = 2,4 \text{ мм},$$

$$h^{-1}T_1(0) = 0,423 \sqrt[3]{E \left(\frac{pR}{h}\right)^2}. \quad (2.220)$$

Расхождение с (2.217) и (2.216) составляет 1,66 и 1,89 процентов соответственно, т. е. относительно невелико. Моментная теория по справочнику [39], дает $w(0) = 2,5$ мм; это значение больше, чем по (2.220), чего не может быть по физическим соображениям, поскольку заделка должна приводить к уменьшению прогиба. Расхождение с (2.219) составляет 20,3 процента. Численное решение по книге [168], с.247 дает $w(0) = 2,3$ мм. Ошибка составляет 10 процентов. Формула (2.219) является достаточно точной, поскольку величину

$$\varepsilon^3 \beta^{1/3} \frac{R}{h} = 0,322 \cdot 10^{-3}$$

можно считать пренебрежимо малой в сравнении с $h^{-1}w_0(0) = 5,9$, поэтому заметное расхождение с литературными данными, видимо, следует отнести к неточности последних. В заключение приведем значение $w(0)$ по линейной теории изгиба пластины: $w(0) = 50,8$ мм, т. е. линейная теория здесь совершенно неприменима.

2.16. Задача о выворачивании сферического купола

Нелинейная теория оболочки особенно большое значение приобретает при исследовании больших закритических деформаций. Последние тесно связаны с тем фактом, что решения нелинейных краевых задач теории оболочек, как правило, неединственны, т. е. одним и тем же нагрузкам отвечают несколько равновесных конфигураций. В частности, выпуклые оболочки вращения имеют несколько равновесных конфигураций при отсутствии внешней нагрузки. Переход с одной конфигурации на другую, разумеется, требует совершения некоторой работы, однако в дальнейшем новая конфигурация может устойчиво существовать без приложения внешней нагрузки.

Ниже рассмотрена элементарная задача о выпуклой равновесной конфигурации сферического купола. При этом будет показано, что она не сводится к чисто зеркальному отражению.

Отсчетная (натуральная) конфигурация сферического купола задается вектором

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = R \sin \theta \mathbf{e} + R \cos \theta \mathbf{k}, \quad (2.221)$$

где R — радиус сферы; \mathbf{e} и \mathbf{k} — орты цилиндрической системы координат, связанные с оортами главных направлений \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 на сфере формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{n}, & \mathbf{k} &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{n}, \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, & \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, & \mathbf{n} &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (2.222)$$

где θ — угол, составляемый нормалью с оортом \mathbf{k} . Купол считается свободным от закреплений.

Наряду с конфигурацией (2.221) существует конфигурация, определяемая заданием вектора $\mathbf{R}(\theta, \varphi)$ и тензора $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$ посредством формул

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta, \varphi) &= f(\theta) \mathbf{e} + g(\theta) \mathbf{k}, & f(\theta) &= R \sin \theta + \tilde{u}(\theta), & g(\theta) &= R \cos \theta + \tilde{w}(\theta), & \tilde{\psi} &= \tilde{\psi}(\theta), \\ \mathbf{P}(\theta, \varphi) &= \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \cos \tilde{\psi} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) + \sin \tilde{\psi} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.223)$$

где \tilde{u} и \tilde{w} — радиальное и осевое смещения точек купола; $\tilde{\psi}$ — угол поворота материальных волокон, которые до деформации были ортогональны срединной поверхности.

Зададим смещения и угол поворота в виде

$$\tilde{u} = u(\theta), \quad \tilde{w}(\theta) = -2R(\cos \theta - \cos \theta_0) + w(\theta), \quad \tilde{\psi} = -2\theta + \psi(\theta), \quad (2.224)$$

где u, w и ψ считаются малыми.

Если функции u, w и ψ положить равными нулю, то уравнения (2.223)–(2.224) задают зеркальное отражение купола. Вычисляя по (2.223)–(2.224) тензоры деформации (2.148), (2.150) и (2.151), получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\cos \theta u' + \sin \theta w}{R} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{u}{R \sin \theta} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, & ()' &\equiv \frac{d}{d\theta}, \\ \boldsymbol{\Phi} &= -\frac{2}{R} \mathbf{c} + \frac{1}{R} (\psi' \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \text{ctg } \theta \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \\ \boldsymbol{\gamma} &= [\psi + \frac{1}{R} (-\sin \theta u' + \cos \theta w')] \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (2.225)$$

Из этих формул видно, что тензор растяжения и вектор сдвига являются малыми, а тензор изгиба – кручения содержит конечное слагаемое, связанное со значительным изменением кривизны купола. Энергию деформации примем в ее простейшей форме

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.226)$$

где тензоры упругости $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3, \boldsymbol{\Gamma}$ также принимаются в простейшей форме (см. разд. 3.11 и 3.17).

Подставляя уравнение (2.225) в (2.226), получаем

$$W = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{4(1+\nu)}{R^2} - \frac{2(1+\nu)}{R} (\kappa_1 + \kappa_2) \right] + \frac{1}{2} N_1 \gamma_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} (t_1 \varepsilon_1 + t_2 \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (m_1 \kappa_1 + m_2 \kappa_2), \quad (2.227)$$

где

$$t_1 = \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, \quad t_2 = \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1, \quad N_1 = Gh \Gamma_0 \gamma_1, \quad m_1 = \kappa_1 + \nu \kappa_2, \quad m_2 = \kappa_2 + \nu \kappa_1. \quad (2.228)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1$ — компоненты тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, соответственно, κ_1, κ_2 — компоненты тензора $\boldsymbol{\Phi}$:

$$R\kappa_1 = \psi', \quad R\kappa_2 = \text{ctg } \theta \psi.$$

Составим функционал потенциала энергии

$$\Pi = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} W \sin \theta d\theta,$$

где θ_0 соответствует краю купола. Легко проверяется формула

$$\int_0^{\theta_0} (\kappa_1 + \kappa_2) \sin \theta d\theta = \frac{1}{R} \psi_0 \sin \theta_0, \quad \psi_0 \equiv \psi(\theta_0).$$

Теперь функционал Π можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi R^2} \Pi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (1 - \cos \theta_0) 4(1+\nu) h_*^2 - \frac{2(1+\nu)}{R^2} \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \psi_0 \sin \theta_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} \left[\frac{Eh}{1-\nu^2} (t_1 \varepsilon_1 + t_2 \varepsilon_2) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (m_1 \kappa_1 + m_2 \kappa_2) + N_1 \gamma_1 \right] \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.229)$$

Уравнениям Эйлера для функционала Π можно придать вид

$$\begin{aligned} B t^2 &= [\sin \theta (B t_1 \cos \theta - N_1 \sin \theta)]', \quad B \equiv \frac{Eh}{1-\nu^2}, \\ [\sin \theta (B t_1 \sin \theta + N_1 \cos \theta)]' &= 0, \\ (\sin \theta m_1)' - \cos \theta m_2 - \sin \theta \frac{RN_1}{D} &= 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{aligned} \quad (2.230)$$

Естественные краевые условия имеют вид

$$B t_1^0 \cos \theta_0 - N_1^0 \sin \theta_0 = 0, \quad R m_1^0 = 2(1+\nu), \quad B t_1^0 \sin \theta_0 + N_1^0 \cos \theta_0 = 0. \quad (2.231)$$

При получении условий (2.231) принималось $\sin \theta_0 \neq 0$. Если в уравнении (2.230) функции t_1, t_2, N_1, m_1, m_2 выразить через u, w и ψ , то получим систему трех уравнений для определения функций u, w и ψ .

Однако удобнее использовать другой подход, а именно: все искомые величины можно выразить через перерезывающую силу N_1 и угол поворота ψ , для которых можно получить систему уравнений

$$LN_1 + \left(\nu - \frac{2(1+\nu)}{\Gamma_0} \right) N_1 = -Eh\psi,$$

$$L\psi - \nu\psi = \frac{1}{D}R^2N_1, \quad (2.232)$$

где $L = ()'' + \text{ctg } \theta() - \text{ctg}^2 \theta$.

Усилия и моменты находятся через N_1 и ψ по формулам

$$\begin{aligned} T_1 \equiv Bt_1 &= -\text{ctg } \theta N_1, & T_2 \equiv Bt_2 &= -N_1', \\ M_1 \equiv Dm_1 &= \frac{1}{R}D(\psi' + \text{ctg } \theta\psi), \\ M_2 \equiv Dm_2 &= \frac{1}{R}D(\psi \text{ctg } \theta + \nu\psi'). \end{aligned} \quad (2.233)$$

Проводя над системой (2.232) преобразование Мейсснера, приходим к одному уравнению для комплексной функции

$$X = \psi + i\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{h_*} \frac{N_1}{Eh}, \quad h_*^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad (2.234)$$

$$LX + i\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{h_*}X = 0. \quad (2.235)$$

При переходе от системы (2.232) к уравнению (2.235) допускалась ошибка $O(h_*)$ по сравнению с единицей. Нетрудно получить и точное уравнение для X , однако в этом нет необходимости. Подробно все выкладки проведены в разделе 3.22, поэтому здесь они не воспроизводятся.

Краевые условия для X имеют вид

$$\text{Re}[X' + \nu \text{ctg } \theta X]|_{\theta=\theta_0} = 2(1 + \nu), \quad \text{Im}X|_{\theta=\theta_0} = 0. \quad (2.236)$$

Как известно, решение уравнения (2.235) может быть выражено через присоединенные функции Лежандра, которые мало пригодны для практических вычислений. Однако искать точное решение уравнения (2.235) не имеет смысла, поскольку оно само является приближенным, в связи с этим (2.235) целесообразно упростить, перепишем его в виде

$$X'' + \frac{1}{\theta}X' - \left(\frac{1}{\theta^2} - i\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{h_*} \right) X + \left(\text{ctg } \theta - \frac{1}{\theta} \right) X + \left(\frac{1}{\theta^2} - \text{ctg}^2 \theta \right) X = 0.$$

Слагаемое, подчеркнутое двумя чертами, можно отбросить при всех значениях θ ($\theta \leq \pi/2$). При этом допускается ошибка $O(h_*)$. Далее будем считать оболочку настолько тонкой, что допустима ошибка порядка $O(\sqrt{h_*})$ по сравнению с единицей. Тогда можно отбросить и слагаемое, подчеркнутое одной чертой. В результате получаем уравнение Бесселя

$$X'' + \frac{1}{\theta}X' - \left(\frac{1}{\theta^2} - i\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{h_*} \right) X = 0. \quad (2.237)$$

Нас интересует решение уравнения, ограниченное при $\theta \rightarrow 0$. Оно может быть представлено в виде

$$X = \theta \exp \frac{\theta - \theta_0}{\beta} \left[A \cos \frac{\theta - \theta_0}{\beta} + B \sin \frac{\theta - \theta_0}{\beta} + i \left(B \cos \frac{\theta - \theta_0}{\beta} - A \sin \frac{\theta - \theta_0}{\beta} \right) \right], \quad (2.238)$$

где A и B — произвольные вещественные постоянные, а малый параметр β определен формулой

$$\beta = \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}.$$

Функция (2.238) удовлетворяет уравнению (2.237) с ошибкой $O(\sqrt{h_*})$ при всех θ , включая область малых θ . Подчиняя ее краевым условиям (2.236), получаем значения произвольных постоянных

$$B = 0, \quad A = \frac{2(1+\nu)\beta}{\theta_0 + \beta(1+\nu\theta_0 \operatorname{ctg} \theta_0)}. \quad (2.239)$$

Для угла поворота и перерезывающей силы в соответствии с уравнением (2.234) получаем формулы

$$\psi = A\theta \exp \frac{\theta - \theta_0}{\beta} \cos \frac{\theta - \theta_0}{\beta}, \quad (2.240)$$

$$N_1 = -Eh2A\beta^2\theta \exp \frac{\theta - \theta_0}{\beta} \sin \frac{\theta - \theta_0}{\beta}, \quad (2.241)$$

где A определена формулой (2.239).

Функции ψ и N_1 являются функциями типа пограничного слоя первого и третьего порядков, соответственно. Предполагая величины порядка $O(\beta)$ малыми по сравнению с единицей и считая угол θ_0 не малым ($\theta_0 \gg \beta$), выражение для потенциальной энергии (2.229) переписываем в упрощенной форме

$$\begin{aligned} \frac{\Pi}{2\pi R^2} &= 2(1+\nu)Bh_*^2[2(1-\cos \theta_0) - 2(1+\nu)\beta \sin \theta_0] + \\ &+ \frac{1}{2Eh} \int_0^{\theta_0} N_1'^2 \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} Bh_*^2 \int_0^{\theta_0} \psi'^2 \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.242)$$

Подставляя сюда выражения (2.241), после некоторых преобразований приходим к выражениям

$$\frac{1}{2Eh} \int_0^{\theta_0} N_1'^2 \sin \theta d\theta = \frac{Bh_*^2}{2} 4(1+\nu)^2 \int_0^{\theta_0} \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \exp \frac{2(\theta - \theta_0)}{\beta} \left(\sin \frac{\theta - \theta_0}{\beta} + \cos \frac{\theta - \theta_0}{\beta} \right)^2 \sin \theta d\theta,$$

$$\frac{Bh_*^2}{2} \int_0^{\theta_0} \psi'^2 \sin \theta d\theta = \frac{Bh_*^2}{2} 4(1+\nu) \int_0^{\theta_0} \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \exp \frac{2(\theta - \theta_0)}{\beta} \left(\cos \frac{\theta - \theta_0}{\beta} - \sin \frac{\theta - \theta_0}{\beta} \right)^2 \sin \theta d\theta,$$

$$\frac{\Pi}{2\pi R^2} = 2(1+\nu)Bh_*^2[2(1-\cos \theta_0) - 2(1+\nu)\beta \sin \theta_0 + 2(1+\nu) \int_0^{\theta_0} \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \exp \frac{2(\theta - \theta_0)}{\beta} \sin \theta d\theta]. \quad (2.243)$$

Вычисляя интеграл в выражении (2.243), окончательно получаем

$$\frac{\Pi}{2\pi R^2} = 2(1+\nu)Bh_*^2[2(1-\cos \theta_0) - (1+\nu)\beta \sin \theta_0]. \quad (2.244)$$

Первое слагаемое в этом выражении отвечает энергии чисто зеркального отражения, а второе слагаемое соответствует энергии краевого эффекта, которая в данной задаче оказывается пренебрежимо малой.

Подведем итоги. Выше были найдены две равновесные конфигурации сферического купола. Первая конфигурация тривиальна и описывается функциями

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{w} = 0, \quad \tilde{\psi} = 0.$$

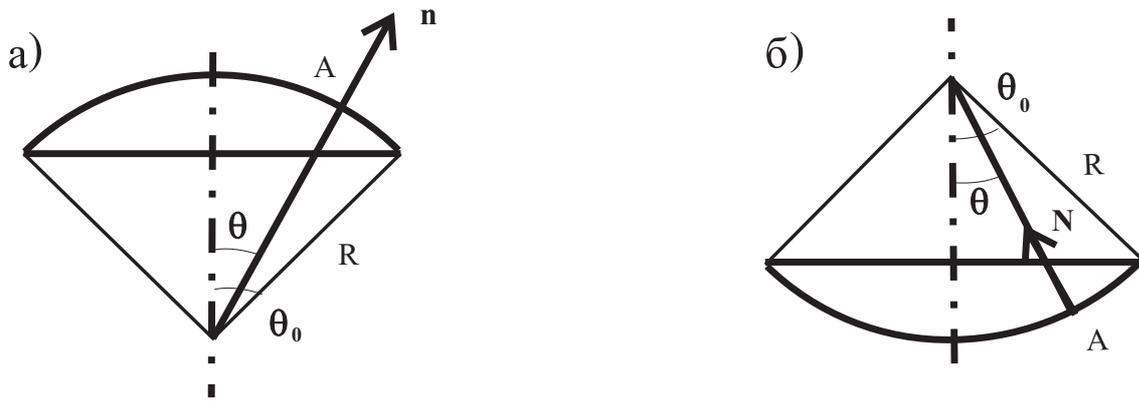


Рис. 2.3:

Это невозмущенная исходная конфигурация, которой соответствует нулевая потенциальная энергия. Вторая равновесная конфигурация описывается функциями (2.224) и почти совпадает с зеркально отраженной (вывернутой) конфигурацией сферического купола (рис. 2.3,а — исходная конфигурация сферического купола и рис. 2.3,б — вывернутая конфигурация сферического купола). Эта конфигурация обладает малой, но положительной потенциальной энергией (2.244). Легко убедиться, что обе конфигурации устойчивы относительно малых возмущений.

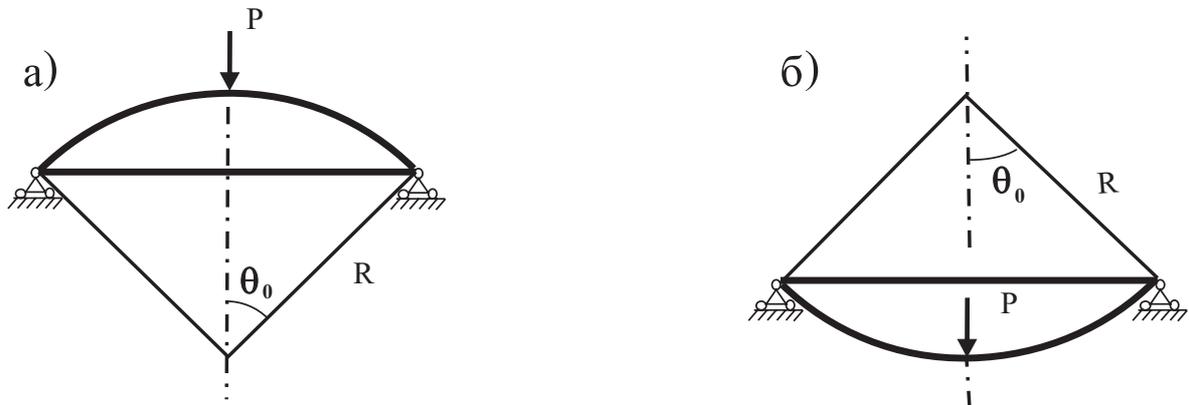


Рис. 2.4:

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Выше была рассмотрена задача для купола, свободного от краевых закреплений. Однако решение не изменится, если вместо свободного края рассмотреть шарнирно-опертый край. Действительно, в последнем

случае к условиям (2.231) нужно добавить условие

$$\theta = \theta_0 : w = 0,$$

которое легко выполняется за счет смещения всего купола как жесткого целого. Напомним, что w есть осевое смещение купола, которое определено с точностью до произвольной постоянной.

Выявленная неединственность решения сохраняется, очевидно, и при приложении нагрузки. Действительно, представим себе ситуацию, изображенную на рис. 2.4. Шарнирно-опертый сферический купол нагружен в центре силой P . Возможны, по крайней мере, две ситуации. Первая: сила P мала, и ей соответствуют две равновесные конфигурации с существенно различными стрелами прогиба (рис. 2.4,а — исходная конфигурация сферического купола и рис. 2.4,б — вывернутая конфигурация сферического купола). Вторая: сила P велика, и ей соответствует только одна конфигурация, изображенная на рис. 2.4,б — “закритическая” конфигурация сферического купола. Поэтому связь между стрелой прогиба и силой, строго говоря, должна быть неоднозначной.

Глава 3.

Теория термоупругих оболочек постоянной толщины

В предыдущем разделе была построена формальная теория простых термоупругих оболочек. Ниже будет рассмотрено приложение этой теории к описанию однородных по толщине оболочек постоянной толщины. Здесь и далее термин “оболочка” используется для обозначения трехмерного тела, толщина которого много меньше остальных характерных размеров. Для двумерной модели этого тела употребляется термин “простая оболочка”. Целью этого раздела является установление соответствия между оболочкой и простой оболочкой, а также определение всех тензоров, входящих в выражение для свободной энергии (2.153). Эти тензоры можно вычислить по данным линейной теории.

3.1. Линеаризация основных уравнений

Движение простой оболочки определяется заданием вектора $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ и ортогонального тензора $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$. В линейной теории вместо $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ удобнее использовать вектор смещения

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{x}, 0), \quad (3.1)$$

причем вектор смещения предполагается малым вместе со своими временными и пространственными производными. Ортогональный тензор $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ удобно представить через вектор малого поворота $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, который вводится следующим образом. Согласно уравнениям (2.19) и (2.18) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Phi}_\alpha. \quad (3.2)$$

При малых движениях последнее слагаемое в уравнении (3.2) — малая второго порядка. Отбрасывая ее, приходим к уравнению

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_\alpha \doteq \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_\alpha \doteq \partial_\alpha \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\Omega} \doteq \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ называется вектором (бесконечно) малого поворота. Согласно (2.21), имеем уравнение для определения $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$

$$\partial_\alpha \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Phi}_\alpha \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \partial_\alpha \mathbf{P} \doteq \partial_\alpha \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \partial_\alpha \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \doteq \partial_\alpha (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{I}).$$

Поскольку при малых движениях тензор \mathbf{P} незначительно отличается от единицы, из последнего уравнения получаем

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \doteq \mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{I}. \quad (3.4)$$

Для векторов $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ имеем формулы

$$\mathbf{D}_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{d}_k(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{d}_k(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

Поскольку выбор векторов $\mathbf{d}_k(\mathbf{x})$ произволен, то выберем их так, чтобы

$$\mathbf{d}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — вектор нормали к недеформированной несущей поверхности. Для мер деформации получаем формулы

$$\mathbf{A}^\times \equiv (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{D}_k) \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{d}^k \doteq \mathbf{a} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \equiv \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K}^\times = \mathbf{F} + \mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{r}^\alpha \otimes (\boldsymbol{\Phi}_\alpha \cdot \mathbf{D}_k) \mathbf{d}^k \doteq \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \nabla \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.8)$$

Тензоры деформации при линейризации переходят в следующие:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times T} - \mathbf{a}) \doteq \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^T), \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n} \doteq \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\vartheta} \equiv -\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.10)$$

Смысл вектора $\boldsymbol{\vartheta}$ устанавливается из формул

$$\mathbf{n}_*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n}_* = \mathbf{n} + (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\vartheta}) \times \mathbf{n}, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{n}_*(\mathbf{x}, t)$ — вектор нормали к деформированной несущей поверхности: вектор $\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}, t)$ — суть изменение нормали в процессе деформации; $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\vartheta}$ — вектор поворота нормали. Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ есть разность

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}_3(\mathbf{x}, t) - \mathbf{n}_*(\mathbf{x}, t).$$

Тензор деформации $\boldsymbol{\Phi}$ в линейном приближении переходит в тензор \mathbf{k} :

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times T} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \doteq \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T) \equiv \mathbf{k}. \quad (3.12)$$

Обозначение второго тензора деформации через \mathbf{k} не совсем удачно, поскольку через \mathbf{k} был обозначен тензор $\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{k}_\alpha$, где $\partial_\alpha \mathbf{d}_k = \mathbf{k}_\alpha \otimes \mathbf{d}_k$. Однако можно надеяться, что путаницы не произойдет, ибо при условии (3.6) тензор \mathbf{k} можно выразить через $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ согласно формуле (2.157), поэтому в дальнейшем тензор \mathbf{k} будет фигурировать только в смысле (3.12). Тензор $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T$ плоский и кососимметричный, его можно выразить через \mathbf{c} , а формулу (3.12) записать в виде

$$\boldsymbol{\Phi} \doteq \mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{e} \cdot \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}. \quad (3.13)$$

В линейной теории можно не учитывать различие в отсчетной и актуальной конфигурации при написании уравнений движения. Исчезает также разница между тензорами усилий и моментов: тензоры Коши с точностью до малых второго порядка совпадают с тензорами Пиолы–Кирхгофа и энергетическими. Уравнения движения в линейном приближении имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho(\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_1^T \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}}), \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} = \rho(\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}}), \quad (3.15)$$

где тензоры инерции и плотность ρ вычислены в отсчетной конфигурации, но для краткости индексы “0” опущены.

3.2. Смысл векторов смещения и поворотов в простой оболочке

Смещения и повороты в теории простых оболочек вводились формально. Интерес представляет установление их взаимоотношений со смещениями частиц оболочки, рассматриваемой как трехмерное тело. Можно предложить несколько способов установления упомянутого соответствия. Рассмотрим один из них.

В теории простых оболочек вводятся такие понятия, как количество движения и момент количества движения. Они вычисляются по формулам (2.26) и (2.27), соответственно

$$\mathbf{K}_1^{(2)} = \int_{(\sigma)} \rho(\dot{\mathbf{u}} + \Theta_1^T \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) d\sigma, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K}_2^{(2)} = \int_{(\sigma)} \rho[\Theta_1 \cdot \dot{\mathbf{u}} + \Theta_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{u}} + \Theta_1^T \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}})] d\sigma, \quad (3.17)$$

где интегрирование ведется по недеформированной несущей поверхности, что допустимо в линейной теории. Геометрию несущей поверхности отождествляем с геометрией поверхности внутри оболочки, отстоящей на расстоянии h_1 от нижней и h_2 от верхней лицевых поверхностей оболочки.

Количество движения оболочки вычисляется по формуле

$$\mathbf{K}_1^{(3)} = \int_{(\sigma)} \langle \tilde{\rho} \dot{\mathbf{u}}_* \rangle d\sigma, \quad \langle \mathbf{f} \rangle \equiv \int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{f} \mu dz, \quad (3.18)$$

где $\mu = 1 - 2zH + Kz^2$; H и K — средняя и гауссова кривизны поверхности, с которой отождествлена несущая поверхность. Подчеркнем, что эти поверхности тождественны только в отсчетной конфигурации, а смещения и повороты несущей поверхности могут не совпадать со смещениями и поворотами частиц, принадлежащих поверхности “приведения”.

Требую совпадения уравнения (3.16) с (3.18), получаем

$$\rho(\mathbf{u} + \Theta_1^T \cdot \boldsymbol{\phi}) = \langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* \rangle, \quad (3.19)$$

где $\tilde{\rho}(x, z)$ и $\mathbf{u}_*(x, z, t)$ — плотность и смещение частиц трехмерной среды.

Кинетический момент оболочки определяется по формуле

$$\mathbf{K}_2^{(3)} = \int_{(\sigma)} \langle (\mathbf{r} + \mathbf{z}\mathbf{n}) \times \tilde{\rho} \dot{\mathbf{u}}_* \rangle d\sigma. \quad (3.20)$$

Требую совпадения этой величины с уравнением (3.17), приходим к уравнению

$$\rho(\Theta_1 \cdot \mathbf{u} + \Theta_2 \cdot \boldsymbol{\phi}) = \langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* z \rangle \cdot \mathbf{c}. \quad (3.21)$$

Система уравнений (3.19) и (3.21) служит для определения векторов \mathbf{u} и $\boldsymbol{\phi}$. Используя для тензоров инерции и плотности формулы (2.35) и решая (3.19), (3.21), получаем формулы

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* \rangle}{\langle \tilde{\rho} \rangle} - \frac{\langle \tilde{\rho} z \rangle \langle \tilde{\rho} \rangle \langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* z \rangle - \langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* \rangle \langle \tilde{\rho} z \rangle}{\langle \tilde{\rho} \rangle \langle \tilde{\rho} z^2 \rangle - \langle \tilde{\rho} z \rangle^2} \cdot \mathbf{a}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\phi} = \frac{\langle \tilde{\rho} \rangle \langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* z \rangle - \langle \tilde{\rho} z \rangle \langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* \rangle}{\langle \tilde{\rho} \rangle \langle \tilde{\rho} z^2 \rangle - \langle \tilde{\rho} z \rangle^2} \cdot \mathbf{c}. \quad (3.23)$$

Последним выражением дается только плоская часть вектора $\boldsymbol{\varphi}$. Поворот вокруг нормали \mathbf{n} остается неопределенным, но он не может войти ни в одно физическое уравнение. Об этом уже говорилось в разд. 2.12. В частности, этот поворот не входит в тензоры деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{k} . Например, подставляя в уравнение (3.13) $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{n}$, получаем ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{k} = [\nabla(\boldsymbol{\omega}\mathbf{n})] \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}2\boldsymbol{\omega}\mathbf{b} = -\mathbf{b}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{\omega}.$$

Отметим, что в формулы для определения кинематических переменных \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$ вошла плотность материала — это обстоятельство играет важную роль в теории неоднородных оболочек. Оно показывает, что более плотные слои играют большую роль, нежели менее плотные.

Казалось бы естественным выдвинуть требование, чтобы кинетическая энергия простой оболочки также была осредненной кинетической энергией оболочки. Однако в общем случае это требование не выполнимо. Более того, такое требование противоречило бы физическим представлениям. Действительно, плотности кинетической энергии трехмерной среды есть мера возможных движений частиц трехмерной среды, в том числе и тех, которые не оказывают никакого влияния на движение простой оболочки, а стало быть и на кинетическую энергию простой оболочки.

Ситуация здесь такая же, как в пространственной теории упругости, где колебательная энергия атомов в решетке не оказывает никакого влияния на кинетическую энергию сплошной среды. Далее будет показано, что принятое нами (формальное) определение кинетической энергии вполне согласовано с трехмерной теорией. Здесь же отметим только следующее утверждение: функционал “кинетической энергии относительных движений” внутри тела–точки

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_{-h_1}^{h_2} \bar{\rho} |\dot{\mathbf{u}}_* - \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{z}\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\varphi}}|^2 \mu dz \geq 0 \quad (3.24)$$

принимает минимальное значение на векторах $\dot{\mathbf{u}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, определенных формулами (3.22)–(3.23).

3.3. Альтернативный вывод уравнений движения

В предыдущем разделе уравнения движения были получены на основе формальных постулатов баланса количества движения и кинетического момента непосредственно для двумерной среды. Ниже будет показано, что уравнения движения и, следовательно, упомянутые постулаты полностью согласованы с пространственными уравнениями движения.

Рассмотрим нормальную систему координат x^1, x^2, z , связанную с поверхностью приведения. Область, занятую оболочкой, определим заданием вектора

$$\mathbf{p}(x, z) = \mathbf{r}(x) + \mathbf{z}\mathbf{n}(x), \quad -h_1 \leq z \leq h_2. \quad (3.25)$$

Базисные векторы этой системы координат определяются по формулам

$$\mathbf{g}_\alpha(x, z) = \partial_\alpha \mathbf{p}(x, z) = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{n}, \quad (3.26)$$

где тензор

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} - \mathbf{z}\mathbf{b}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\top \quad (3.27)$$

называется геометрическим тензором сдвига.

Векторы взаимного базиса определяются по формулам

$$\mathbf{g}^\alpha = \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{r}^\alpha, \quad \mathbf{g}^3 = \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{-1} = (\text{tr } \boldsymbol{\mu})\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu}. \quad (3.28)$$

Обозначим через $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$ тензор напряжений в трехмерной среде, который представим в базисе нормальной системы координат

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) = \tau^{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \otimes \mathbf{g}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \quad (3.29)$$

Уравнения движения трехмерной среды в принятой системе координат могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \sqrt{g} \tau^\alpha}{\partial g^\alpha} + \frac{\partial \sqrt{g} \tau^3}{\partial z} \right) + \tilde{\rho} \mathbf{F}_* = \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{u}}_*(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t), \quad (3.30)$$

где

$$g = \det(g_{ik}) = \alpha \mu^2, \quad \alpha = \det(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta), \\ \mu = \det(\mu_\beta^\alpha), \quad \boldsymbol{\tau}^i = \mathbf{g}^i \cdot \boldsymbol{\tau} = \tau^{ik} \mathbf{g}_k.$$

Уравнение (3.21) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial \sqrt{\alpha} \mu \tau^\alpha}{\partial \chi^\alpha} + \frac{\partial \mu \tau^3}{\partial z} + \tilde{\rho} \mu \mathbf{F}_* = \mu \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{u}}_*. \quad (3.31)$$

Осредняя это уравнение с помощью оператора (3.18), приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \chi^\alpha} [\sqrt{\alpha} \langle \tau^\alpha \rangle] + \mu \tau^3|_{z=h_2} - \mu \tau^3|_{z=-h_1} + \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle = \langle \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{u}}_* \rangle$$

или в эквивалентной форме записываем его в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \langle \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{u}}_* \rangle, \quad \nabla = \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha, \quad (3.32)$$

где приняты обозначения

$$\mathbf{T} \equiv \langle \mathbf{r}_\alpha \tau^\alpha \rangle \equiv \langle \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle, \quad (3.33)$$

$$\rho \mathbf{F} = \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + (\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{z=h_2} - (\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{z=-h_1}. \quad (3.34)$$

Тензор \mathbf{T} , введенный формулой (3.33), следует отождествить с тензором усилий в простой оболочке, а вектор $\rho \mathbf{F}$ — с поверхностной силой, действующей на простую оболочку.

Умножая теперь (3.31) векторно на $z\mathbf{n}$ слева, приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial (\mathbf{n} \times z \tau^\alpha \mu) \sqrt{\alpha}}{\partial \chi^\alpha} - \mu z \partial_\alpha \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}^\alpha + z \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{n} \times \mu \tau^3) + \mathbf{n} \times \tilde{\rho} z \mu \mathbf{F}_* = \mathbf{n} \times \tilde{\rho} \mathbf{u}_* z \mu. \quad (3.35)$$

Поскольку $z \partial_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{g}_\alpha - \mathbf{r}_\alpha$, то

$$z \partial_\alpha \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}^\alpha = (\mathbf{g}_\alpha - \mathbf{r}_\alpha) \times \boldsymbol{\tau}^\alpha = -\mathbf{g}_3 \times \boldsymbol{\tau}^3 - \mathbf{r}_\alpha \times \boldsymbol{\tau}^\alpha,$$

так как $\mathbf{g}_s \times \boldsymbol{\tau}^s = 0$.

Осредняя уравнение (3.35) с учетом предыдущих формул, получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} = \langle \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{u}}_* z \rangle \cdot \mathbf{c}, \quad (3.36)$$

где

$$\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} z \rangle \cdot \mathbf{c}, \quad (3.37)$$

$$\rho \mathbf{L} = \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle \cdot \mathbf{c} + [(\mu \mathbf{z} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{z=h_2} - (\mu \mathbf{z} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{z=-h_1}] \cdot \mathbf{c}. \quad (3.38)$$

Тензор \mathbf{M} , определенный (3.37), и вектор $\rho \mathbf{L}$ отождествим с тензором моментов и поверхностным внешним моментом в простой оболочке.

Последний шаг на пути установления уравнений движения (3.14)–(3.15) состоит во введении вместо двух векторов $\langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* \rangle$ и $\langle \tilde{\rho} \mathbf{u}_* \mathbf{z} \rangle \cdot \mathbf{c}$, стоящих в правых частях уравнений (3.33) и (3.36), двух новых векторов \mathbf{u} и $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\phi}$, определенных как решение системы (3.19), (3.21). Такая замена взаимно однозначна и потому возможна. Таким образом, пришли к уравнениям трехмерной среды

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho(\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}), \quad (3.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} = \rho(\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}). \quad (3.40)$$

Эти уравнения являются точными следствиями пространственных уравнений.

Интегрируя теперь (3.39) и (3.40) по области (σ) на поверхности приведения, используя формулы Коши и теорему о дивергенции, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \rho(\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) d\sigma = \int_{(\sigma)} \rho \mathbf{F} d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{T}_{(\mathbf{v})} d\mathcal{C}, \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \rho(\boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) d\sigma = \int_{(\sigma)} [\rho \mathbf{L} + \mathbf{T}_\times] d\sigma + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{M}_{(\mathbf{v})} d\mathcal{C}, \quad (3.42)$$

где

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_{(\mathbf{v})} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}, \quad (|\mathbf{v}| = 1, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0). \quad (3.43)$$

Уравнение (3.41) есть уравнение баланса количества движения простой оболочки. Чтобы получить уравнение баланса кинетического момента, нужно исключить из (3.42) последнее слагаемое с помощью формулы

$$\int_{(\sigma)} \mathbf{T}_\times d\sigma = -\frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \mathbf{r} \times \rho(\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) d\sigma + \int_{(\mathcal{C})} \mathbf{r} \times \mathbf{T}_{(\mathbf{v})} d\mathcal{C} + \int_{(\sigma)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\sigma.$$

В результате приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \rho[\boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_1^\top \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}})] d\sigma = \int_{(\sigma)} \rho(\mathbf{L} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}) d\sigma + \int_{(\mathcal{C})} (\mathbf{M}_{(\mathbf{v})} + \mathbf{r} \times \mathbf{T}_{(\mathbf{v})}) d\mathcal{C}. \quad (3.44)$$

Это и есть уравнение баланса кинетического момента. Таким образом, пришли к уравнениям баланса (2.44) и (2.45), которые ранее вводились на основе самостоятельных постулатов. Правда, здесь мы ограничились линейной теорией, но можно убедиться, что это справедливо и в нелинейной теории. Разница будет состоять в том, что придется исходить из уравнений движения в недеформированной метрике, т. е. с использованием тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, а вместо уравнений для перемещений и поворотов (3.19) и (3.21) использовать уравнения для скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и $\boldsymbol{\Omega}$. После этого вектор $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ и тензор $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ находятся как решения задачи Коши

$$\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\boldsymbol{\Phi}}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Phi}_\alpha,$$

$$\partial_\alpha \mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}_\alpha \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\Phi}_\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

Эту проблему подробно обсуждать не будем.

Избранный в этой работе путь построения теории простых оболочек посредством формальных постулатов, имеющих четкий физический смысл, нам кажется предпочтительней, поскольку известны задачи теории простых оболочек, в которых уравнения (3.30) не применимы. Простейший пример — тонкие пленки типа мыльных пузырей, в которых поверхностная энергия является основной. Имеются и другие примеры.

В заключение, отметим, что из уравнений (3.36)–(3.38) следуют формулы

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{M}^T \cdot \cdot \mathbf{b} + \mathbf{T}^T \cdot \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.45)$$

Второе из этих соотношений есть шестое уравнение равновесия, а два оставшиеся подобно обсуждались в разделе 2.12.

3.4. Уравнение баланса энергии

Наиболее спорными в теории простых оболочек, видимо, являются уравнения баланса энергии и неравенства производства энтропии. “Обосновывать” последние с позиций трехмерной теории мы не будем, ибо это увело бы нас слишком далеко от основной цели. Отметим только, что это весьма трудный вопрос. Что же касается уравнения баланса энергии, то его, видимо, следует обсудить подробнее. В предыдущем разделе оно было введено как постулат. Далее также будет принят некий постулат, но в другой форме.

За основу построения примем уравнения движения (3.39) и (3.40), являющиеся следствием уравнений (3.30). Умножим теперь скалярно (3.39) на $\dot{\mathbf{u}}$, (3.40) — на $\dot{\boldsymbol{\phi}}$. Сложим получившиеся уравнения, а итог проинтегрируем по области (σ). После ряда простых преобразований приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \rho \mathcal{K} d\sigma = - \int_{(\sigma)} (\mathbf{T}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{k}}) d\sigma + \int_{(\sigma)} \rho (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) + \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{T}_{(\nu)} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{(\nu)} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) d\mathcal{C}, \quad (3.46)$$

где

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad (3.47)$$

тензоры \mathbf{e} и \mathbf{k} определены формулами (3.7) и (3.8). Уравнение (3.46) следует из пространственной теории, но это еще не уравнение баланса энергии. Однако в нем фигурирует плотность кинетической энергии (3.47), совпадающая с введенной ранее на основе формального постулата, поэтому задание кинетической энергии в виде (3.47) также согласовано с трехмерной теорией, но оно может не совпадать с осредненной кинетической энергией трехмерной среды, о чем уже говорилось в разд. 3.2. Чтобы от (3.46) перейти к уравнению баланса энергии, необходим дополнительный постулат, а именно первый закон термодинамики. Его можно сформулировать так:

“Существует функция состояния, являющаяся аддитивной функцией массы и называемая внутренней энергией, такая, что ее дифференциал равен работе внутренних усилий–моментов на бесконечно малых деформациях плюс приток энергии механического происхождения (обычно в форме тепла)”.

Математически это утверждение записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \rho U d\sigma = \int_{(\sigma)} (\mathbf{T}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \dot{\mathbf{k}}) d\sigma + \int_{(\sigma)} \rho g d\sigma - \int_{\mathcal{C}} h_{(\nu)} d\mathcal{C}, \quad (3.48)$$

где \mathbf{U} — массовая плотность внутренней энергии, g — поверхностное производство тепла, $h_{(\nu)}$ — скорость отвода тепла через границу C .

Разумеется, выражение (3.48) является постулатом, но это такой постулат, который неизбежен в любой феноменологической теории. Он не хуже и не лучше, чем аналогичный постулат в пространственной теории упругости. В сущности, (3.48) есть определение внутренней энергии. Если оно интегрируемо, а именно это и утверждает первый закон термодинамики, то и свободная энергия определена.

Подставляя выражение (3.48) в (3.46), приходим к уравнению баланса энергии в форме

$$\frac{d}{dt} \int_{(\sigma)} \rho(\mathcal{K} + \mathbf{U}) d\sigma = \int_{(\sigma)} \rho(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) d\sigma + \int_C (\mathbf{T}_{(\nu)} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}_{(\nu)} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}) dC + \int_{(\sigma)} \rho g d\sigma - \int_C h_{(\nu)} dC. \quad (3.49)$$

Именно эта форма уравнения баланса энергии постулировалась ранее как исходное положение.

Конечно, (3.49) не является следствием уравнения баланса энергии трехмерной среды, но, по нашему мнению, в этом и нет никакой необходимости.

Для пояснения рассмотрим изотермический процесс. В этом случае свободная энергия совпадает с энергией деформации.

Выясним, должна ли энергия деформации простой оболочки совпадать с осредненной энергией деформации трехмерной среды.

Последняя определяется формулой

$$2W_*[\boldsymbol{\varepsilon}_*(\mathbf{x}, \mathbf{z})] = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_*(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (3.50)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_*$ — линейный тензор деформации трехмерной среды.

Из уравнения (3.50) видим, что на W_* среди прочего влияет работа напряжений $\tau^{31}, \tau^{32}, \tau^{33}$. Однако, согласно уравнениям (3.33) и (3.37), эти напряжения вообще не входят в определение тензоров усилий и моментов, а стало быть, и энергия деформации простой оболочки не должна содержать работы этих напряжений. Отсюда следует, что энергия деформации простой оболочки не может быть в общем случае осредненной энергией W_* .

Из сказанного ясно, что теория простых оболочек есть нечто отличное от математического следствия из пространственной теории упругости, поэтому вопрос о ее практической приемлемости подлежит дальнейшему обсуждению. Этому и будет уделено внимание в дальнейшем.

3.5. Определяющие уравнения в линейной теории оболочек

Соотношения Коши–Грина (2.123) в линейной теории простых оболочек принимают вид:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}}, \quad S_\alpha = -\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t_\alpha}, \quad (3.51)$$

где свободная энергия Ψ рассматривается как функция тензоров деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и температур t_α . В линейной теории свободная энергия имеет вид (2.153), где тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\gamma}$ заменены их линейными приближениями.

Формулы (3.51) удобнее записать в другом виде. Начнем с формулы для момента

$$\mathbf{M} = M^{\alpha k} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{d}_k, \quad \boldsymbol{\kappa} = \kappa_{\alpha k} \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{d}^k, \quad \mathbf{k} = k_{\beta \gamma} \mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}^\gamma. \quad (3.52)$$

Согласно соотношениям (3.51) имеем

$$\begin{aligned} M^{\alpha k} &= \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \kappa_{\alpha k}} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial k_{\beta \gamma}} \frac{\partial k_{\beta \gamma}}{\partial \kappa_{\alpha k}} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial k_{\alpha \gamma}} \mathbf{r}_\gamma \cdot \mathbf{d}^k \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \mathbf{k}}, \\ \mathbf{M} &= M^{\alpha \beta} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta, \quad M^{\alpha \beta} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \kappa_{\alpha \beta}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Для тензора усилий имеем

$$\mathbf{T} = T^{\alpha k} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{e} = e_{\alpha k} \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{d}^k, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{\beta \gamma} \mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}^\gamma, \quad \boldsymbol{\gamma} = \gamma_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \quad (3.54)$$

$$T^{\alpha k} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial e_{\alpha k}} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \varepsilon_{\beta \gamma}} \frac{\partial \varepsilon_{\beta \gamma}}{\partial e_{\alpha k}} + \frac{\partial \rho \Psi}{\partial k_{\beta \gamma}} \frac{\partial k_{\beta \gamma}}{\partial e_{\alpha k}} + \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \gamma_\beta} \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial e_{\alpha k}}. \quad (3.55)$$

Справедливы формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{\beta \gamma}}{\partial e_{\alpha k}} &= \frac{1}{2} (\delta_\beta^\alpha \mathbf{r}_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{d}^k, \quad \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial e_{\alpha k}} = \delta_\beta^\alpha \delta_3^k, \\ \frac{\partial k_{\beta \gamma}}{\partial e_{\alpha k}} &= \frac{1}{2} \mathbf{b}_\beta^{\gamma_1} \mathbf{c}_{\gamma_1}^{\bullet \omega} (\delta_\omega^\alpha \mathbf{r}_\gamma - \delta_\gamma^\alpha \mathbf{r}_\omega) \cdot \mathbf{d}^k. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.55), приходим к представлению

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \otimes \mathbf{n} \quad (3.56)$$

или в эквивалентных записях

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad (3.58)$$

где \mathbf{N} — суть вектор перерезывающих сил.

В правой части выражения (3.57) стоит симметричный тензор, поэтому свертка левой части с \mathbf{c} должна равняться нулю:

$$\mathbf{T}^\top \cdot \cdot \mathbf{c} + \mathbf{M}^\top \cdot \cdot \mathbf{b} = 0,$$

но это шестое уравнение равновесия (3.45), которое, таким образом, выполнено при любом задании Ψ , как функции $\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$.

Итак, тензоры усилий и моментов определены как функции тензоров деформации и температур, если задана свободная энергия. Определяющие уравнения для потоков тепла в нелинейной теории были предложены в форме (2.130), причем (2.130) просто постулировались. В линейной теории дело обстоит проще, а именно, используя приведенные неравенства диссипации, можно доказать, что определяющие уравнения для потоков тепла имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= -\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \nabla \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{h}_2 = -\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \nabla \mathbf{t}_2, \quad Q_1 = -Q_2 = -\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2), \\ g_1 &= -\beta_1(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_+), \quad g_2 = -\beta_2(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_-). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Неравенства диссипации энергии при этом сводятся к следующим:

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}_\alpha \cdot \mathbf{u} \geq 0, \quad \forall \mathbf{u}, \quad \beta_\alpha \geq 0, \quad \gamma \geq 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.60)$$

Уравнения распространения тепла в линейной теории принимают вид

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \nabla t_1) = \rho g_{01} - \rho \gamma (t_1 - t_2) - \rho \beta_1 (t_1 - t_+) - t_1 \left(\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t_1} \right)^\bullet, \quad (3.61)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \nabla t_2) = \rho g_{02} - \rho \gamma (t_2 - t_1) - \rho \beta_2 (t_2 - t_-) - t_2 \left(\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t_2} \right)^\bullet. \quad (3.62)$$

Эти уравнения все еще нелинейные по температурам. Переход к линейной теории осуществляется заменой

$$t_\alpha \left(\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t_\alpha} \right)^\bullet \rightarrow t_\alpha^0 \left(\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t_\alpha} \right)^\bullet, \quad \sum \alpha,$$

где $t_1^0 = t_2^0$ — температура, в окрестности которой находятся температурные поля. Обычно это температура натурального состояния, т. е. состояния, в котором при отсутствии деформаций тензоры усилий и моментов обращаются в нуль.

3.6. Энергия деформации простой оболочки

Квадратичная по тензорам деформации часть свободной энергии называется энергией деформации. Согласно уравнению (2.153), в линейной теории она имеет вид

$$\rho_0 W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{k} \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (3.63)$$

где тензоры четвертого ранга \mathbf{C}_k ($k = 1, 2, 3$), тензоры третьего ранга $\boldsymbol{\Gamma}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) и тензор второго ранга $\boldsymbol{\Gamma}$ называются тензорами упругих модулей. Все они плоские и, кроме того, удовлетворяют ряду очевидных ограничений.

1. Тензоры $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3, \boldsymbol{\Gamma}$ — симметричны, т. е.

$$\mathbf{b} \cdot \cdot \mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k \cdot \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{b}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T \quad (k = 1, 3), \quad (3.64)$$

где \mathbf{b} — тензор второго ранга.

2. Тензоры $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \boldsymbol{\Gamma}_1$ — удовлетворяют условию аполярности

$$\mathbf{c} \cdot \cdot \mathbf{C}_k = 0, \quad \mathbf{c} \cdot \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1 = 0, \quad \mathbf{c} = -\mathbf{c}^T, \quad (k = 1, 2). \quad (3.65)$$

Наконец, последнее ограничение на тензоры упругих модулей состоит в требовании положительной определенности энергии деформации

$$\rho_0 W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{k}) > 0, \quad (3.66)$$

если хотя бы одна из норм $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$, $\|\mathbf{k}\|$, $|\boldsymbol{\gamma}|$ отлична от нуля.

Условие (3.66) нельзя получить ни из каких термодинамических рассуждений, оно выражает интуитивное представление о том, что простая оболочка сопротивляется любой деформации, сопровождающейся отличными от нуля тензорами деформации. Энергия деформации зависит от девяти переменных: компонент тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{k}$. Если эти тензоры равны нулю, то простая оболочка может совершать только жесткие движения, т. е. движения абсолютно твердого тела. Позднее мы увидим, что условие (3.66) можно немного ослабить.

Математически условие (3.66) будет обеспечивать сильную эллиптичность уравнений статики и гиперболичность уравнений движения простых оболочек.

3.7. Типы тензоров и их группы симметрии

Тип рассматриваемого тензора и его группа симметрии играют важную роль. Ряд понятий этого раздела являются новыми и не рассматривались в алгебре. К сожалению, без введения этих понятий все построения резко усложняются, а формулы становятся слишком громоздкими, поэтому данная мера вынужденная, и остается только надеяться, что в будущем эти понятия будут введены в алгебру.

В физике и механике прочно утвердились понятия полярных и аксиальных векторов. Первые интерпретируются как трансляции, а вторые — как вращения в трехмерном пространстве. Часто аксиальные векторы заменяют соответствующими кососимметричными тензорами. Это, видимо, оправдано в алгебре, где выделение трехмерных пространств из всех других выглядит несколько странно. В классической физике, имеющей дело исключительно с трехмерным пространством, такое выделение является естественным. По нашему мнению, исключение из механики таких понятий, как угловая скорость и момент, в малой степени улучшит формальную структуру механики, но значительно уменьшит наглядность многих теорем механики. Впрочем, это дело привычки. В данной работе будет использоваться трехмерность и эвклидовость пространства, в которое вложена простая оболочка.

В трехмерном пространстве можно ввести тензоры различных типов. Наиболее распространенными являются полярные или эвклидовы тензоры — они не зависят от выбора ориентации ни в самом пространстве, ни в его подпространствах. Рассмотрим тензор ранга p в трехмерном пространстве. Ортогональным преобразованием эвклидова тензора \mathbf{S} называется тензор \mathbf{S}' , который определяется следующим образом:

$$\mathbf{S} = S^{m_1 \dots m_p} \mathbf{e}_{m_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{m_p}, \quad \mathbf{S}' \equiv \otimes_1^p \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = S^{m_1 \dots m_p} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_p}, \quad (3.67)$$

где \mathbf{e}_S — некоторый базис; \mathbf{Q} — ортогональный тензор.

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1. \quad (3.68)$$

Группой симметрии тензора называется множество ортогональных тензоров, для которых ортогональное преобразование совпадает с самим тензором

$$\mathbf{S}' = \otimes_1^p \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}. \quad (3.69)$$

Это множество не пусто, ибо единичный тензор заведомо ему принадлежит. Оно действительно образует группу, поскольку если ему принадлежат два тензора \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 , то ему же принадлежат тензоры $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$. Кроме того, если \mathbf{Q} принадлежит упомянутому множеству, то и обратный тензор ему принадлежит. Во всех этих утверждениях легко убедиться непосредственно согласно выражениям (3.67) и (3.69). Группу симметрии тензора \mathbf{S} будем обозначать символом \mathbb{O}_S . Группа симметрии единичного тензора совпадает с полной ортогональной группой \mathbb{O} . Действительно,

$$\mathbf{I}' \equiv \mathbf{Q} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{Q} : \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

Тензоры, группа симметрии которых совпадает с полной ортогональной группой, называются изотропными. Имеется только один изотропный тензор второго ранга — единичный тензор. Симметричный тензор второго ранга имеет группу симметрии, состоящую не менее чем из восьми элементов

$$\mathbf{Q} = \pm \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

где \mathbf{e}_k — главные оси рассматриваемого тензора.

Для евклидовых тензоров приведенные определения ортогонального преобразования тензора и их групп симметрии являются общепринятыми.

Аксиальным, или псевдоевклидовым, тензором называется тензор, зависящий от выбора ориентации трехмерного пространства. Ориентация пространства определяется следующим образом. В данной точке пространства можно ввести множество базисов \mathbf{e}_S , т. е. множество ортонормированных троек векторов. Это множество можно разбить на два подмножества, каждое из которых состоит только из таких троек \mathbf{e}_S , которые переводятся одна в другую посредством поворота. Переход от одного подмножества к другому осуществляется с помощью тензора инверсии ($-\mathbf{I}$). Выбор одного из подмножеств (например множества правых троек) базисов называется ориентацией пространства. Евклидовы тензоры не зависят от ориентации, а псевдоевклидовы тензоры при изменении ориентации меняют знак. Ориентированным тензором называется такой тензор, который зависит от выбора ориентации как самого пространства, так и ориентации его подпространств, которые можно выбирать независимо друг от друга. Псевдоевклидов тензор — частный случай ориентированного тензора. Ортогональным преобразованием псевдоевклидова тензора \mathbf{S} ранга p называется тензор, определенный по правилу

$$\mathbf{S}' \equiv (\det \mathbf{Q}) \otimes_1^p \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = (\det \mathbf{Q}) S^{m_1 \dots m_p} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_p}. \quad (3.70)$$

Определение группы симметрии аксиального тензора совпадает с таковым для полярного тензора (3.69); меняется только определение ортогонального преобразования: (3.70) вместо (3.67).

Примером аксиального тензора первого ранга является вектор, полученный в результате векторного произведения двух полярных векторов

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Поскольку \mathbf{c} определен через \mathbf{a} и \mathbf{b} , то его ортогональное преобразование естественно определить через ортогональные преобразования векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}', \quad \mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}.$$

Найдем теперь, как связан \mathbf{c}' с \mathbf{c} . Используя определение векторного произведения (2.4), приходим к формулам

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{Q}^T \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{b} = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}.$$

Это и есть определение (3.70).

Рассмотрим теперь одномерное подпространство трехмерного пространства, т. е. прямую в E_3 . Обозначим ее символом \mathbf{n} . Тензор называется \mathbf{n} -ориентированным, если он зависит только от выбора ориентации на прямой \mathbf{n} .

Ортогональным преобразованием \mathbf{n} -ориентированного тензора \mathbf{S} называется тензор \mathbf{S}' , определенный по правилу

$$\mathbf{S}' = \delta \otimes_1^p \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}, \quad (3.71)$$

где $\delta = 1$, если \mathbf{Q} не меняет ориентации на прямой \mathbf{n} ; $\delta = -1$, если \mathbf{Q} меняет ориентацию на прямой \mathbf{n} .

В данной работе в качестве прямой \mathbf{n} будет фигурировать прямая, ортогональная касательной плоскости к несущей поверхности. Ориентация этой прямой означает выбор положительного направления нормали. Последний выбирается произвольно, однако все физические уравнения не должны от него зависеть, как это и получится в конечном счете.

Определение группы симметрии \mathbf{n} -ориентированного тензора остается прежним (3.69). Примером \mathbf{n} -ориентированного тензора является второй метрический тензор несущей поверхности:

$$\mathbf{b} = -\nabla \mathbf{n} = -\frac{1}{R_1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{R_2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (3.72)$$

где R_α — главные радиусы кривизны; \mathbf{e}_α — главные оси тензора \mathbf{b} ; \mathbf{n} — единичная нормаль к несущей поверхности. В данной работе все тензоры рассматриваются как тензоры в трехмерном пространстве и в этом отличие от теории поверхностей, где второй метрический тензор рассматривается в двумерном пространстве, а его тензорность устанавливается по отношению к преобразованиям, не затрагивающим нормаль. По отношению к преобразованиям в трехмерном пространстве второй метрический тензор не является евклидовым. Действительно, допустим, что \mathbf{b} — евклидов тензор. Тогда, согласно выражениям (3.67) и (3.69), группа симметрии определялась бы как множество ортогональных решений уравнения

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{b}. \quad (3.73)$$

Рассмотрим ортогональный тензор

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (3.74)$$

Подставляя уравнение (3.74) в (3.73), убеждаемся, что он удовлетворяет уравнению (3.73), т. е. принадлежит группе симметрии \mathbf{b} . С другой стороны, \mathbf{b}' можно определить как

$$\mathbf{b}' = -\nabla' \mathbf{n}' = \nabla \mathbf{n} = -\mathbf{b},$$

т. е. второй метрический тензор при отражении (3.74) меняет знак. Пришли к противоречию, означающему, что \mathbf{b} не является евклидовым тензором.

Согласно определению ортогонального преобразования (3.71), имеем

$$\mathbf{b}' = (-1)\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{b},$$

т.е. (3.74) не принадлежит группе симметрии \mathbf{b} .

Еще один тип тензора, который будет встречаться в дальнейшем, — это \mathbf{n} -ориентированный аксиальный тензор. Его ортогональное преобразование определяется формулой

$$\mathbf{S}' = \delta (\det \mathbf{Q}) \otimes_1^p \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = \delta (\det \mathbf{Q}) S^{m_1 \dots m_p} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{m_p}, \quad (3.75)$$

где δ — то же, что и в (3.71).

Примером \mathbf{n} -ориентированного аксиального тензора является дискриминантный тензор несущей поверхности

$$\mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathbf{a}.$$

Этот тензор зависит как от выбора ориентации в трехмерном пространстве, так и от выбора ориентации на прямой, натянутой на \mathbf{n} . В то же время тензоры $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$, $(\text{tr } \mathbf{b}) \mathbf{c}$, $\text{tr}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$ (где \mathbf{e} — евклидов) и так далее являются аксиальными. Например,

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})' = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c}' = \delta^2 \det \mathbf{Q} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{Q}^T = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (3.76)$$

т. е. пришли к определению ортогонального преобразования аксиального тензора второго ранга. Это очевидно из формулы для тензора

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \nabla \mathbf{n} \times \mathbf{n}.$$

Встречаются, конечно, и объекты других типов, но нам они не понадобятся, поэтому ограничимся только перечисленными выше типами тензоров.

Перечислим типы тензоров, встречающихся в этой работе.

Полярные (евклидовы) тензоры: $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{A}^\times(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{T}_0(\mathbf{x}, t)$, $\rho \boldsymbol{\Theta}_2(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{C}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{C}_3(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$.

Аксиальные (псевдоевклидовы) тензоры: $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{K}^\times(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{C}_2(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)$, $\rho \boldsymbol{\Theta}_1(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}(\mathbf{x})$, $\mathbf{M}_0(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{k}(\mathbf{x}, t) \simeq \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, t)$.

Полярные \mathbf{n} -ориентированные тензоры: $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\Gamma}_1(\mathbf{x}, t)$.

Аксиальные \mathbf{n} -ориентированные тензоры: $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \equiv -\mathbf{a}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\Gamma}_2(\mathbf{x}, t)$.

Операция сложения определена только для тензоров одного типа. Умножаться могут тензоры разных типов. Может показаться странным, что $\rho \boldsymbol{\Theta}_1$ — аксиальный тензор выражается согласно формуле (2.35) через \mathbf{c} аксиальный \mathbf{n} -ориентированный тензор. Противоречия нет, ибо $\rho \boldsymbol{\Theta}_1$ выражается через $\mathbf{z}\mathbf{c}$ — аксиальный тензор, поскольку \mathbf{z} — \mathbf{n} -ориентированный скаляр: его знак меняется при замене \mathbf{n} на $-\mathbf{n}$. Точно так же полярным является тензор $\boldsymbol{\mu}$ и скаляр μ :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a} - \mathbf{z}\mathbf{b}, \quad \mu = 1 - 2\mathbf{z}\mathbf{H} + \mathbf{K}\mathbf{z}^2,$$

где средняя кривизна \mathbf{H} есть \mathbf{n} -ориентированный скаляр.

В выражение для свободной энергии входят тензоры \mathbf{C}_4 , \mathbf{C}_5 , \mathbf{C}_6 , \mathbf{C}_7 , которые не вошли в приведенные выше списки тензоров. Это объясняется тем, что их тип отличается от вышеописанных типов вследствие наличия температур t_1 , t_2 . При отражении от касательной плоскости меняется наименование температур $t_1 \rightleftharpoons t_2$. Это накладывает некоторые ограничения на тензоры \mathbf{C}_k ($k = 4, 5, 6, 7$), которые будут использованы в дальнейшем.

3.8. Группа симметрии простой оболочки. Принцип Кюри

Обратимся к обсуждению важнейшего для всего последующего рассмотрения понятия — группы симметрии простой оболочки. Практически вся информация о физических свойствах простой оболочки заключена в энергии деформации

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.77)$$

Определение: группой симметрии простой оболочки называется множество \mathbb{O}_S ортогональных тензоров, таких, что выполняется равенство

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) = W(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}^T, \det \mathbf{Q} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}^T, \delta \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \quad (3.78)$$

для любых $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{k} и $\boldsymbol{\gamma}$. Если энергия W задана квадратичной формой (3.77), то равенство (3.78) имеет место тогда и только тогда, когда тензоры упругих модулей допускают множество \mathbb{O}_S своей группой симметрий. Иными словами, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} \otimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1, \quad \det \mathbf{Q} \otimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2, \quad \otimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_3, \quad \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\Gamma}, \\ \delta \otimes_1^3 \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1, \quad \delta \det \mathbf{Q} \otimes_1^3 \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2 = \boldsymbol{\Gamma}_2, \end{aligned} \quad (3.79)$$

где $\mathbf{Q} \in \mathbb{O}_S$; $\delta = -1$, если \mathbf{Q} меняет ориентацию на прямой, натянутой на \mathbf{n} , и $\delta = 1$ в противном случае.

Если бы нам были известны тензоры упругих модулей, то согласно равенствам (3.79) было бы нетрудно установить \mathbb{O}_S . Наоборот, если бы нам была известна группа симметрии простой оболочки \mathbb{O}_S , то по (3.79) мы бы нашли структуру тензоров упругих модулей, допускающих \mathbb{O}_S своей группой симметрии. К сожалению, мы не знаем ни того, ни другого. В этой ситуации большую помощь оказывает физический принцип Кюри-Неймана, нашедший широкое применение, в частности, в кристаллографии [150].

Принцип Кюри: группа симметрии следствия содержит группу симметрии причины.

Простая оболочка является моделью тонкого трехмерного тела и абстрагирует его основные физико-геометрические свойства. К этим свойствам относятся:

1 — геометрическая форма поверхности приведения, которая определяет форму оболочки постоянной толщины;

2 — свойства материала, из которого изготовлена оболочка, в частности симметрия его упругих свойств;

3 — внутреннее строение оболочки, т. е. расположение материала относительно поверхности приведения.

Выше перечислены основные “причины”, которые порождают “следствие” — простую оболочку. Группа симметрии, очевидно, является пересечением групп симметрии “подпричин”, перечисленных в 1, 2, 3.

Рассмотрим каждую из них в отдельности.

Локальной группой симметрии поверхности приведения, отождествляемой в геометрическом смысле с несущей поверхностью, будем называть множество ортогональных решений системы уравнений

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{a}, \quad \delta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{b}. \quad (3.80)$$

Общим решением первого уравнения из этой системы являются ортогональные тензоры вида

$$\mathbf{Q} = \pm \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q} = \mathbf{a}. \quad (3.81)$$

Решения второго уравнения из (3.81) нужно искать уже в классе тензоров, поэтому для δ можно принять формулу

$$\delta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.82)$$

Для плоскостей $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ второе уравнение в системе (3.80) выполнено при всех \mathbf{Q} , поэтому (3.81) дает локальную группу симметрии плоскости. Для сфер $\mathbf{b} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}$ второе уравнение в (3.81) почти совпадает с первым, но запрещены отражения от касательной плоскости, т. е. для сфер группа симметрии состоит из тензоров вида

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q} = \mathbf{a}. \quad (3.83)$$

В общем случае поверхности к ее группе симметрии принадлежат только следующие тензоры:

$$\mathbf{I}, \quad \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{a}, \quad \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (3.84)$$

Группу симметрии упругих свойств материала, из которого изготовлена оболочка, будем обозначать через \mathbb{O}_e . Она определяется стандартным образом. Наконец, группу симметрии внутреннего строения простой оболочки будем обозначать символом \mathbb{O}_α . К сожалению, эту группу трудно полностью описать формальными средствами. Она является пересечением группы, определяющей как множество ортогональных решений системы уравнений

$$(\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot \Theta_1 \cdot \mathbf{Q}^T = \Theta_1, \quad \mathbf{Q} \cdot \Theta_2 \cdot \mathbf{Q}^T = \Theta_2, \quad (3.85)$$

и некоторой другой группы.

Тензоры Θ_α характеризуют распределение массы относительно поверхности приведения, а упомянутая другая группа характеризует распределение упругих свойств — эту группу надо “видеть”, т. е. иметь перед глазами картину распределения массовых и упругих свойств материала относительно поверхности приведения. Для иллюстрации опишем два простых примера.

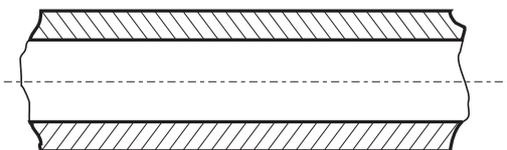


Рис. 3.1:

Пример 1. Пластина изготовлена из трех однородных слоев материала. Ее строение изображено на рис. 3.1. Возможны существенно различные случаи.

1. Внешние слои одинаковы, а поверхность приведения выбрана в середине внутреннего слоя. Масса и упругие свойства распределены относительно поверхности приведения — отражение от плоскости приведения принадлежит к группе симметрии внутреннего строения.
2. Все три слоя различны, но масса над поверхностью приведения равна массе под поверхностью приведения. Упругие свойства несимметричны относительно плоскости приведения. Отражение от касательной плоскости не принадлежит к группе симметрии внутреннего строения.
3. Масса распределена несимметрично, а упругие свойства — симметрично. Отражение от плоскости приведения не принадлежит к группе симметрии внутреннего строения.

В рассмотренном примере отражения от плоскостей, ортогональных плоскости приведения, принадлежат группе симметрии внутреннего строения.

Пример 2. Пластина выполнена из набора изотропных материалов, расположенных как на рис. 3.2. Возможны существенно различные случаи.



Рис. 3.2:

В этом примере ни отражения относительно поверхности приведения, ни отражения от плоскостей, ортогональных плоскости приведения, не принадлежат группе симметрии внутреннего строения.

Из сказанного выше следует, что в общем случае простой оболочки группа ее симметрии не шире, чем множество (3.84). Допустим, что группы симметрии упругих свойств и внутреннего строения содержат группу (3.84). Этот случай реализуется на рис. 3.1 и не реализуется на рис. 3.2.

Рассмотрим тензор

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{a}, \quad \det \mathbf{Q} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (3.86)$$

Этот тензор согласно принципу Кюри должен принадлежать группе симметрии простой оболочки и, следовательно, группе симметрии тензоров Γ_1 и Γ_2 . Но, согласно определению ортогонального преобразования тензоров, имеем

$$\Gamma'_\alpha = \otimes_1^3 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{a}) \cdot \Gamma_\alpha = -\Gamma_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2), \quad (3.87)$$

поэтому (3.86) принадлежит группе симметрии Γ_α тогда и только тогда, когда

$$\Gamma_1 = \mathbf{0}, \quad \Gamma_2 = \mathbf{0}. \quad (3.88)$$

Иными словами, если исключить случаи, подобные изображенному на рис. 3.2, то деформация растяжения и изгиба-кручения отделяются от деформации поперечного сдвига. В случае на рис. 3.2 растяжение пластины будет сопровождаться деформацией поперечного сдвига. дальнейшее условие (3.87) будет предполагаться выполненным, т. е. мы ограничили класс оболочек, допустимых к рассмотрению. Тем не менее оставшийся класс оболочек достаточно широк — он включает ортотропные, подкрепленные, многослойные и другие оболочки.

Требование принадлежности группы (3.84) к группе симметрии остальных тензоров упругих модулей позволяет также упростить их структуру, но она останется достаточно сложной. Радикальное упрощение тензоров упругих модулей потребует дополнительного рассмотрения, но об этом речь пойдет позже.

3.9. Тензорные базисы на касательной плоскости

Выберем два взаимно ортогональных направления на касательной плоскости \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , например, можно принять, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — главные направления на несущей поверхности. Составим из них четыре линейно независимых тензора второго ранга

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2; & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2; \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1; & \mathbf{a}_4 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Линейная независимость этих тензоров вытекает из формул

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \text{tr } \mathbf{a}_i^2 \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4). \quad (3.90)$$

Тензоры \mathbf{a}_i образуют тензорный базис на плоскости, т. е. любой плоский тензор второго ранга может быть представлен в виде разложения

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^4 P_i \mathbf{a}_i \quad \Rightarrow \quad P_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_i / \text{tr } \mathbf{a}_i^2. \quad (3.91)$$

Тензоры (3.89) удобно использовать и для представления плоских тензоров более высоких рангов. В частности, любой плоский тензор третьего ранга может быть представлен в виде

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}_i \otimes \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_i / \text{tr } \mathbf{a}_i^2, \quad (3.92)$$

где \mathbf{P}_i — плоские векторы.

Тензоры третьего ранга могут быть представлены и в другом виде

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{a}_i \cdot \cdot \mathbf{P} / \text{tr} \mathbf{a}_i^2. \quad (3.93)$$

Ясно, что векторы \mathbf{P}_i , входящие в выражение (3.92) и (3.93), не совпадают между собой. Нам понадобятся в зависимости от обстоятельств оба представления тензоров третьего ранга.

Тензоры четвертого ранга на плоскости допускают следующие разложения:

$$\mathbf{P} = \sum_{i,j=1}^4 P_{i,j} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j, \quad P_{i,j} = \mathbf{a}_i \cdot \cdot \mathbf{P} \cdot \cdot \mathbf{a}_j / (\text{tr} \mathbf{a}_i^2 \text{tr} \mathbf{a}_j^2). \quad (3.94)$$

Числа $P_{i,j}$ будем по-прежнему называть компонентами тензора \mathbf{P} , т. е. компоненты $P_{i,j}$ образуют матрицу второго порядка, но в пространстве четырех измерений. Симметричный тензор четвертого ранга имеет симметричную матрицу компонент:

$$\mathbf{a}_i \cdot \cdot \mathbf{P} \cdot \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \cdot \cdot \mathbf{P} \cdot \cdot \mathbf{a}_i \quad \Rightarrow \quad P_{ij} = P_{ji}, \quad (3.95)$$

поэтому симметричный тензор четвертого ранга имеет только десять независимых компонент. Если, кроме того, тензор \mathbf{P} удовлетворяет условию аполярности

$$\mathbf{c} \cdot \cdot \mathbf{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{3j} = 0, \quad (3.96)$$

где \mathbf{c} — плоский кососимметричный тензор второго ранга, то он имеет только шесть независимых компонент. Общее представление аполярного симметричного тензора четвертого ранга имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & P_{11} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 + P_{12} (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1) + P_{22} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \\ & + P_{14} (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_1) + P_{24} (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_2) + P_{44} \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Именно таким является тензор упругих модулей \mathbf{C}_1 , входящий в выражение для энергии деформации.

Тензор упругих модулей \mathbf{C}_3 является симметричным, но не удовлетворяет условию аполярности. Тензор \mathbf{C}_2 не является симметричным, но удовлетворяет условию аполярности (3.97). В дальнейшем нам придется рассматривать ортогональные преобразования различных тензоров. Для этого удобно предварительно рассмотреть ортогональные преобразования базисных тензоров \mathbf{a}_i .

Предварительно составим таблицу скалярных произведений базисных тензоров

—	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	
\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	
\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_3	
\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_3	$-\mathbf{a}_4$	$-\mathbf{a}_1$	\mathbf{a}_2	
\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_4	$-\mathbf{a}_3$	$-\mathbf{a}_2$	\mathbf{a}_1	(3.98)

Причем левый множитель выписан в первом столбце, а правый — в первой строке. Результат представлен в клетке, являющейся пересечением соответствующих столбцов и строк.

Возьмем ортогональный тензор \mathbf{Q} , осуществляющий поворот вокруг вектора \mathbf{n} на угол θ :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos \theta \mathbf{a}_1 - \sin \theta \mathbf{a}_3, \quad (3.99)$$

где θ — угол поворота вокруг \mathbf{n} против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца \mathbf{n} . Нетрудно установить формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{a}_1; & \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{Q}^T &= \cos 2\theta \mathbf{a}_2 + \sin 2\theta \mathbf{a}_4; \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{a}_3; & \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{Q}^T &= \cos 2\theta \mathbf{a}_4 - \sin 2\theta \mathbf{a}_2, \end{aligned} \quad (3.100)$$

где \mathbf{Q} определен формулой (3.99).

3.10. Ортотропные оболочки — предварительные результаты

Ортотропные оболочки — это обширный класс оболочек, представляющих большой практический интерес. Для них возможны существенные упрощения тензоров упруго-термических модулей. Ортотропной будем называть оболочку, которая (в данной точке) обладает двумя различными плоскостями симметрии, ортогональными несущей поверхности. Отсюда можно сделать вывод, что в этом случае любая плоскость, ортогональная несущей поверхности, будет плоскостью симметрии, поэтому группа симметрии ортотропной оболочки содержит тензоры

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (3.101)$$

где \mathbf{e}_α — главные направления на несущей поверхности.

Первый тензор из уравнения (3.101) осуществляет отражение от плоскости, ортогональной \mathbf{e}_2 , а второй — от плоскости, ортогональной \mathbf{e}_1 . Теперь нам нужно указать общее строение тензоров упруго-термических модулей, допускающих (3.89) своими элементами симметрии. Используя представление всех тензоров, перечисленных в определении группы симметрии простой оболочки через базисные тензоры, можно доказать, что общий вид тензора \mathbf{C}_1 в этом случае дается формулой

$$\mathbf{C}_1 = A_{11} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 + A_{12} (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1) + A_{22} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + A_{44} \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4. \quad (3.102)$$

Причем \mathbf{C}_1 является симметричным и удовлетворяет условию аполярности.

Тензор \mathbf{C}_2 является аксиальным и удовлетворяет условию аполярности, поэтому его общий вид можно представить формулой

$$\mathbf{C}_2 = B_{13} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_3 + B_{14} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_4 + B_{23} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3 + B_{24} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_4 + B_{41} \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_1 + B_{42} \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_2. \quad (3.103)$$

Общий вид тензора \mathbf{C}_3 , допускающего тензоры (3.101) своими элементами симметрии, можно выразить формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3 &= C_{11} \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 + C_{12} (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1) + C_{22} \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \\ &+ C_{33} \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3 + C_{34} (\mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_3) + C_{44} \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Тензор модулей поперечного сдвига $\mathbf{\Gamma}$, очевидно, должен допускать представление

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma_1 \mathbf{a}_1 + \Gamma_2 \mathbf{a}_2. \quad (3.105)$$

Область применимости формул (3.102)–(3.105) является чрезвычайно широкой, и они составляют основу всех дальнейших построений. Вместе с тем, начиная с этого раздела, настало время изучать более конкретные ситуации. В частности, представляют интерес следующие классы оболочек:

1. Оболочки постоянной толщины из трансверсального изотропного материала. Оболочка может быть многослойной, однако касательная плоскость несущей поверхности должна быть плоскостью симметрии. Этот случай наиболее популярен и глубоко разработан в литературе, поэтому он является серьезной проверкой предлагаемой нами теории.

2. Оболочки, подкрепленные ортогональной сеткой ребер, то есть теория ребристых оболочек. Причем можно рассматривать как теорию конструктивно-анизотропных упругих оболочек, так и теорию дискретно-подкрепленных оболочек.

3. Многослойные оболочки, у которых касательная плоскость несущей поверхности не является плоскостью симметрии.

4. Неупругие многослойные оболочки. В этом случае тензоры упруго-термических модулей будут уже операторами или функционалами.

До конца этой главы мы будем изучать только оболочки, указанные в разд. 1.

3.11. Структура тензоров упругости

Важный класс оболочек, имеющий обширную область приложений, составляют тонкие оболочки постоянной толщины из упругого материала. Этот класс оболочек исследован в литературе наиболее полно, поэтому представляет интерес его рассмотрение с позиций теории простых оболочек и сравнение с известными в литературе уравнениями.

Если материал оболочки изотропен, то тензоры упругих модулей можно существенно упростить. В этом параграфе будет установлен простейший вид тензоров \mathbf{C}_k и $\mathbf{\Gamma}$. Они зависят от ряда размерных и безразмерных величин, характеризующих оболочку в данной точке. Если оболочка однородна по толщине, то

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k(E, h, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu), \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.106)$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; h — толщина оболочки. Зависимость от геометрии в уравнении (3.106) учтена посредством тензора $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Используя Π — теорему [176], можно доказать представление

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \mathbf{C}_1^*(h \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu), \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \mathbf{C}_2^*(h \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu), \quad \mathbf{C}_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \mathbf{C}_3^*(h \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \nu), \end{aligned} \quad (3.107)$$

где $h \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ — малый по норме тензор

$$\|h \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2 = h^2 \|\mathbf{b}^2\| = \frac{h^2}{R_1^2} + \frac{h^2}{R_2^2} \ll 1. \quad (3.108)$$

В выражении (3.107) безразмерные коэффициенты $(1-\nu^2)$ и $12(1-\nu^2)$ вынесены из соображений удобства.

Представим тензоры \mathbf{C}_k в виде разложений

$$\mathbf{C}_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\mathbf{C}_1^{(0)} + \mathbf{C}_1^{(1)} \cdot (h \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + O(\|h \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2) \right], \quad (3.109)$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left[\mathbf{C}_2^{(0)} + \mathbf{C}_2^{(1)} \cdot \cdot (\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{C}_2^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + O(h^3) \right], \quad (3.110)$$

$$\mathbf{C}_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\mathbf{C}_3^{(0)} + \mathbf{C}_3^{(1)} \cdot \cdot (\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{C}_3^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + O(h^2) \right]. \quad (3.111)$$

Разложение тензоров \mathbf{C}_k по целым степеням тензора $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\mathbf{h}$ объясняется тем, что только целые степени аксиального тензора имеют физический и алгебраический смысл.

Допустимость разложений (3.109)–(3.111) почти очевидна для однородных по толщине оболочек, однако для трехслойных оболочек они возможны только при дополнительных ограничениях, которые будут обсуждены в следующем разделе. Разложения (3.109)–(3.111) позволяют свести изучение симметрии тензоров \mathbf{C}_k к установлению структуры тензоров $\mathbf{C}_k^{(m)}$, которые уже зависят не от геометрии несущей поверхности, а только от групп симметрии упругих свойств материала и внутреннего строения простой оболочки. Отметим, что тензоры $\mathbf{C}_1^{(0)}, \mathbf{C}_2^{(1)}, \mathbf{C}_3^{(0)}, \mathbf{C}_3^{(2)}$ полярны, а тензоры $\mathbf{C}_1^{(1)}, \mathbf{C}_2^{(0)}, \mathbf{C}_2^{(2)}, \mathbf{C}_3^{(1)}$ аксиальны. Допустим теперь, что касательная плоскость к несущей поверхности есть плоскость симметрии упругих свойств материала и внутреннего строения. В этом случае группе симметрии тензоров $\mathbf{C}_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, 3; m = 0, 1, 2$) принадлежит, согласно принципу Коши, тензор

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{a}, \quad \det \mathbf{Q} = -1. \quad (3.112)$$

В результате приходим к равенствам

$$\mathbf{C}_1^{(1)} = 0, \quad \mathbf{C}_2^{(0)} = 0, \quad \mathbf{C}_2^{(2)} = 0, \quad \mathbf{C}_3^{(1)} = 0. \quad (3.113)$$

Понятно, что эти равенства справедливы, в частности, и для ортотропного материала. Если материал оболочки трансверсально-изотропен (\mathbf{n} — ось изотропии), то группе симметрии тензоров $\mathbf{C}_1^{(0)}, \mathbf{C}_2^{(1)}, \mathbf{C}_3^{(0)}, \mathbf{C}_3^{(2)}$ принадлежит тензор

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos \theta \mathbf{a} - \sin \theta \mathbf{c}, \quad (3.114)$$

осуществляющий поворот вокруг \mathbf{n} на произвольный угол θ .

Следовательно, для этих тензоров справедливы равенства

$$\otimes_1^4 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_k^{(0)} = \mathbf{C}_k^{(0)}, \quad (k = 1, 3); \quad \otimes_1^6 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_2^{(1)} = \mathbf{C}_2^{(1)}; \quad \otimes_1^8 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_3^{(2)} = \mathbf{C}_3^{(2)}, \quad (3.115)$$

где \mathbf{Q} определен формулой (3.114). Общий вид тензоров $\mathbf{C}_1^{(0)}, \mathbf{C}_3^{(0)}$, удовлетворяющих равенством (3.115), можно представить формулами

$$\mathbf{C}_1^{(0)} = A_1 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + A_2 (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4) + A_3 \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad (3.116)$$

$$\mathbf{C}_3^{(0)} = C_1 \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + C_2 (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4) + C_3 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad (3.117)$$

где тензоры $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}$, \mathbf{a}_2 , $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}$, \mathbf{a}_4 определены формулами (3.89). В тензоры (3.116)–(3.117) входят по три упругих модуля. Однако легко убедиться в справедливости равенств

$$A_3 = C_3 = 0. \quad (3.118)$$

В самом деле, первое из них следует из (3.65), а второе получается из рассмотрения пластины. Для нее формула (3.37) принимает вид

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{z} \rangle \cdot \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow C_3 = 0.$$

Структура трансверсально-изотропного тензора шестого ранга $\mathbf{C}_2^{(1)}$ определяется сравнительно сложной формулой, однако нас интересует не сам тензор $\mathbf{C}_2^{(1)}$, а только его свертка с тензором $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. Для нее имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2^{(1)} \cdot \cdot (\mathbf{h}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) &= 2h\mathbf{H}[\mathbf{B}_1\mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{B}_2(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_2)] + \\ &+ 2h\mathbf{H}_1(\mathbf{B}_3\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_4 + \mathbf{B}_4\mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{B}_5\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{c}), \end{aligned} \quad (3.119)$$

где

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \mathbf{H}_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.120)$$

Слагаемое, содержащее тензор восьмого ранга $\mathbf{C}_3^{(2)}$, в разложении (3.111) выходит за пределы точности теории простых оболочек. Оно вносит поправки $\mathcal{O}(h^2)$ — за единицу длины принят характерный размер оболочки — по сравнению с единицей. Такие поправки игнорировались в выражениях (3.109)–(3.111). Поэтому удержание этого слагаемого с асимптотической точки зрения некорректно, однако оно окажется необходимым для обеспечения положительности энергии деформации. При этом не требуется устанавливать общий вид этого слагаемого, хотя это и возможно. Для дальнейшего окажется достаточным следующий трансверсально-изотропный тензор восьмого ранга

$$\mathbf{C}_3^{(2)} = C_{2112}(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}_4).$$

Таким образом, общий вид тензора \mathbf{C}_k можно представить формулами

$$\mathbf{C}_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [A_1\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + A_2(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4)], \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2 &= \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \{2h\mathbf{H}[\mathbf{B}_1\mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{B}_2(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_2)] + \\ &+ 2h\mathbf{H}_1[\mathbf{B}_3\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}_4 + \mathbf{B}_4\mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a} + \mathbf{B}_5\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{c}]\}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\mathbf{C}_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [C_1\mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + C_2(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4) + h^2\mathbf{H}_1^2 C_4\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}]. \quad (3.123)$$

Тензоры \mathbf{C}_k представлены через базисные тензоры \mathbf{a}_m ($m = 1, 2, 3, 4$), причем последние заданы в базисе главных осей тензоров \mathbf{b} . Нетрудно представить их в произвольном базисе. Не представляет сложности проверка формул

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} = \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{a}_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{n}, \quad (3.124)$$

$$\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_4 = \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad (3.125)$$

$$\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4 \otimes \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{c}^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_\beta, \quad (3.126)$$

$$\mathbf{H}_1\mathbf{a}_4 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{H}\mathbf{c}, \quad \mathbf{H}_1\mathbf{a}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{H}\mathbf{a}. \quad (3.127)$$

Подставив формулы (3.124)–(3.127) в (3.121)–(3.123), получим представления тензоров \mathbf{C}_k в произвольном базисе. Для установления структуры энергии деформации осталось найти тензор $\mathbf{\Gamma}$.

Его вид дается очевидной формулой

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{G}h\mathbf{\Gamma}_0\mathbf{a}, \quad \mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.128)$$

где $\mathbf{\Gamma}_0$ называется коэффициентом поперечного сдвига; $\mathbf{G}h\mathbf{\Gamma}_0$ — жесткостью оболочки на поперечный сдвиг. При построении тензоров \mathbf{C}_k и $\mathbf{\Gamma}$ допустимой считается ошибка порядка $\mathcal{O}(h^2)$ по сравнению с единицей.

3.12. Структура тензоров упругости — продолжение

Обозначим через Ψ_t часть свободной энергии (2.153), обращающуюся в нуль при изотермических процессах ($t_1 = t_2 = t_0$):

$$\begin{aligned} \rho_0 \Psi_t = & \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_4(t_1 - t_0) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_5(t_2 - t_0) + \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{C}_6(t_1 - t_0) + \\ & + \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{C}_7(t_2 - t_0) + \frac{1}{2} \alpha_1 (t_1 - t_0)^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 (t_2 - t_0)^2. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Тензоры второго ранга для оболочек из трансверсально-изотропного материала \mathbf{C}_k ($k = 4, 5, 6, 7$) должны быть трансверсально-изотропными. Кроме того, \mathbf{C}_4 и \mathbf{C}_5 подобны полярным, а \mathbf{C}_7 и \mathbf{C}_8 аксиальным тензорам, если рассматриваются преобразования \mathbf{Q} , не меняющие нормаль $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$.

Тензоры указанного типа можно представить формулами

$$\mathbf{C}_4 = C_5 \mathbf{a}, \quad \mathbf{C}_5 = C'_5 \mathbf{a}, \quad \mathbf{C}_6 = C_6 \mathbf{c}, \quad \mathbf{C}_7 = C'_6 \mathbf{c}. \quad (3.130)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (3.129) возможно, если касательная плоскость есть плоскость симметрии

$$\Psi_t = (\boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\Phi}', t'_1, t'_2) = \Psi_t(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, t_1, t_2), \quad (3.131)$$

где штрих означает отражение от касательной плоскости:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\Phi}' = -\boldsymbol{\Phi}, \quad t'_1 = t_2, \quad t'_2 = t_1. \quad (3.132)$$

Условие (3.130) выполнено тогда и только тогда, когда

$$C_5 = C'_5, \quad C_6 = -C'_6, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (3.133)$$

Окончательно функция Ψ_t принимает вид

$$\rho_0 \Psi_t = C_5 \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right) + C_6 \text{tr} (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{c})(t_1 - t_2) + \frac{1}{2} \alpha [(t_1 - t_0)^2 + (t_2 - t_0)^2], \quad (3.134)$$

где модули C_5 и C_6 зависят от коэффициента линейного расширения материала и параметров оболочки. В уравнение (3.134) вошла средняя температура и перепад температур, причем первая влияет только на тензор усилий, а второй — на тензор моментов. Вычисляя по (3.134) энтропии, получаем

$$\begin{aligned} S_1 = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 \Psi}{\partial t_1} = -\frac{1}{\rho_0} C_5 \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{\rho_0} C_6 \text{tr} (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\Phi}) - \alpha (t_1 - t_0), \\ S_2 = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 \Psi}{\partial t_2} = -\frac{1}{\rho_0} C_5 \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{\rho_0} C_6 \text{tr} (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\Phi}) - \alpha (t_2 - t_0). \end{aligned} \quad (3.135)$$

3.13. Тензоры “начальных” напряжений

В линейной теории свободная энергия является квадратичным, а тензоры $\mathbf{T}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{N}_0$ — линейным функционалом над внешними нагрузками. В локальной теории тензоры $\mathbf{T}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{N}_0$ могут зависеть только от поверхностных и двух первых моментов объемных нагрузок в данной точке — частице простой оболочки. Общий вид линейных зависимостей от указанных аргументов можно представить формулами

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{L}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ + \mathbf{L}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^- + \mathbf{L}_{13} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + \mathbf{L}_{14} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* z \rangle,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{L}_{21} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ + \mathbf{L}_{22} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^- + \mathbf{L}_{23} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + \mathbf{L}_{24} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle, \\ \mathbf{N}_0 &= \mathbf{L}_{31} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ + \mathbf{L}_{32} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^- + \mathbf{L}_{33} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + \mathbf{L}_{34} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle, \end{aligned} \quad (3.136)$$

где $\mathbf{L}_{\alpha 3}$ — тензоры третьего, а \mathbf{L}_{3s} — второго ранга, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_{ps} = 0, \quad \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}_{\alpha s} = 0, \quad (p = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2; \quad s = 1, 2, 3, 4), \quad (3.137)$$

где \mathbf{m} — произвольный вектор.

С ошибкой $O(h)$ тензоры \mathbf{L}_{ps} можно определить из экспериментов с пластинами. Пониженная точность при их определении оправдывается тем, что, как правило, поправки, вносимые \mathbf{T}_0 , \mathbf{M}_0 и \mathbf{N}_0 , сами являются малыми. В принципе, можно найти и более точные представления, если использовать технологию разложений по малому тензору $h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, но это лишено практического смысла, по крайней мере, для не слишком толстых оболочек.

Поскольку материал оболочки трансверсально-изотропен, то такими же должны быть тензоры \mathbf{L}_{ps} . Их общее представление с учетом условий (3.137) имеет вид

$$\mathbf{L}_{1s} = \mathbf{L}_{1s} \mathbf{a} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{L}_{2s} = \mathbf{L}_{2s} \mathbf{c} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{L}_{3s} = \mathbf{a}. \quad (3.138)$$

Дальнейшее упрощение структуры тензоров “начальных” напряжений достигается следующим образом. Произведем отражение от касательной плоскости и запишем закон (3.136) для отраженных величин. Он, очевидно, должен остаться тем же самым, но место $\boldsymbol{\tau}_n^+$ займет $(\boldsymbol{\tau}_n^-)'$, а место $\boldsymbol{\tau}_n^-$ займет $(\boldsymbol{\tau}_n^+)'$. Приходим к представлению

$$\mathbf{T}'_0 = \mathbf{L}_{11} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^-)' + \mathbf{L}_{12} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+) + \mathbf{L}_{13} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle' + \mathbf{L}_{14} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle. \quad (3.139)$$

Отражение производится тензором $\mathbf{Q} = -\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{a}$, потому

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_0 &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{T}_0, \quad (\boldsymbol{\tau}_n^-)' = -\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^-) + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^-, \\ (\boldsymbol{\tau}_n^+) &' = -\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+) + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+, \quad \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle' = \mathbf{Q} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle', \quad \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle' = -\mathbf{Q} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.132), получаем

$$\mathbf{T}_0 = -\mathbf{L}_{11} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^- - \mathbf{L}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ - \mathbf{L}_{13} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle + \mathbf{L}_{14} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle. \quad (3.140)$$

Здесь были учтены формулы (3.138). Требуя совпадения (3.140) с первым из соотношений (3.136), получаем

$$\mathbf{L}_{11} = -\mathbf{L}_{12}, \quad \mathbf{L}_{13} = 0.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных соотношений (3.136). Приведем окончательный вид тензоров начальных напряжений

$$\mathbf{T}_0 = h\mathbf{L}_1 \mathbf{a} [\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-)] + \mathbf{L}_1^* \mathbf{a} \langle \mathbf{n} \cdot \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle, \quad (3.141)$$

$$\mathbf{M}_0 = h^2 \mathbf{L}_2 \mathbf{c} [\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ + \boldsymbol{\tau}_n^-)] + h^2 \mathbf{L}_2^* \mathbf{c} \langle \mathbf{n} \cdot \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \rangle, \quad (3.142)$$

$$\mathbf{N}_0 = h\mathbf{L}_3 \mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-) + \mathbf{L}_3^* \mathbf{a} \cdot \langle \tilde{\rho} \mathbf{F}_* \mathbf{z} \rangle, \quad (3.143)$$

где \mathbf{L}_i и \mathbf{L}_i^* — безразмерные “модули”, зависящие для однослойных оболочек только от коэффициента Пуассона. Все они могут быть найдены из экспериментов с пластинами. В дальнейшем для простоты будем считать, что объемная сила \mathbf{F}_* отсутствует. Поэтому “модулями” \mathbf{L}_i^* заниматься не будем, хотя их определение не представляет большого труда.

3.14. Уравнения неразрывности

Выше были введены в рассмотрение тензоры деформации (3.7)–(3.8)

$$\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\varphi}. \quad (3.144)$$

Очевидно, что они удовлетворяют следующим уравнениям неразрывности [92, 93]

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\kappa}) = 0, \quad \nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) + (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\kappa})_{\times} = 0. \quad (3.145)$$

Сравнивая эти уравнения с однородными уравнениями равновесия (3.14)–(3.15), видим, что они переходят друг в друга посредством замен

$$\mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\kappa}, \quad \mathbf{M} \Leftrightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}. \quad (3.146)$$

Отмеченная дуальность уравнений неразрывности и равновесия в теории оболочек называется статико-геометрической аналогией. Последняя позволяет ввести в рассмотрение функции напряжений, тождественно удовлетворяющие уравнениям равновесия

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{m} + \mathbf{c} \times \mathbf{t}, \quad (3.147)$$

где \mathbf{t} и \mathbf{m} — произвольные, непрерывно дифференцируемые векторы. Формулами (3.147) двенадцать компонент тензоров усилий и моментов выражаются через шесть функций. Если \mathbf{M} — плоский, т. е. $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$, то число независимых функций можно уменьшить до четырех

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{c} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.148)$$

Подставляя формулу (3.148) в (3.147), приходим к представлениям

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} \cdot \nabla (\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{c} \cdot \nabla (\chi \mathbf{n}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} + \chi \mathbf{a}, \quad (3.149)$$

где $\chi \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$. Для пластин и сфер число независимых функций может быть уменьшено до трех, ибо в этих случаях

$$\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\chi = -\nabla \mathbf{m} \cdot \cdot \mathbf{c}. \quad (3.150)$$

Формулы (3.149) в другой записи были установлены А.Л. Гольденвейзером [50] и А.И. Лурье [130].

Уравнения неразрывности (3.145) при наличии ограничений $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$ становятся мало интересными, поскольку главную роль играют приведенные тензоры деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{k} , определенные формулами (3.9), (3.10) и (3.13), соответственно. После несложных преобразований из уравнений (3.145) можно получить следующие четыре уравнения

$$\nabla \cdot \{ \mathbf{c} \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})] \} + \text{tr} \{ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot [\mathbf{k} + \nabla (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\gamma})] \} = 0, \quad (3.151)$$

$$[\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{k})] \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})] + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (3.152)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \text{tr} (\mathbf{k} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \quad (3.153)$$

Последнее уравнение в дальнейшем будет играть особую роль, поскольку при принятии гипотез Кирхгофа — Лява оно становится алгебраическим

$$\boldsymbol{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tr} (\mathbf{k} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad (3.154)$$

и позволяет уменьшить число независимых переменных до шести. Если принять, что $\boldsymbol{\gamma} = 0$, то уравнения (3.151)–(3.152) переходят в классические. Выясним, как устанавливается статико-геометрическая аналогия для тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{k} :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T) \rightarrow -\frac{1}{2}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{c}), \quad (3.155)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{c} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \rightarrow 0, \quad (3.156)$$

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T) \rightarrow -\mathbf{c} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{c}). \quad (3.157)$$

По уравнению (3.156) видим, что для вектора деформации поперечного сдвига в теории оболочек с ограничением $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$ нет статического аналога. Исключая в уравнениях (3.151)–(3.153) тензоры деформации посредством (3.155)–(3.157), приходим к уравнениям равновесия, выраженным через тензор усилий и моментов. При этом в них не войдут перерезывающие усилия $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$, а уравнение (3.153) примет вид

$$\mathbf{T}^T \cdot \cdot \mathbf{c} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \mathbf{b} = 0,$$

т. е. совпадает с шестым уравнением равновесия. Вероятно, можно сформулировать теорию оболочек в терминах таких силовых и деформационных тензоров, что для них будут иметь место формулы типа (3.146). Однако такое преобразование будет носить чисто формальный характер, чего в данной работе мы стремились избегать. С другой стороны, оно позволило бы облегчить, например, комплексное преобразование типа В.В. Новожилова уравнений теории простых оболочек. Как бы то ни было, этот вопрос нами не рассматривался.

3.15. Определение тензора напряжений

Выше была сформулирована теория простых оболочек. Решив ту или иную краевую задачу этой теории, можно найти тензоры усилий и моментов с тем, чтобы можно было использовать, например, критерии прочности. Вообще говоря, это не всегда обязательно. Иногда можно поступать наоборот: критерии прочности формулировать в терминах усилий и моментов. Возможно, что при соответствующей детализации такой подход окажется даже предпочтительнее, но эту проблему мы затрагивать не будем. Цель данного раздела является весьма ограниченной. Ниже будут получены формулы, которые в теории оболочек являются стандартными и иногда более обоснованными, чем в принятом ниже способе их получения.

Согласно уравнениям (3.33) и (3.37) между тензором напряжений $\boldsymbol{\tau}$ в трехмерной среде и тензорами усилий и моментов существует связь

$$\mathbf{T} = \langle \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle, \quad \mathbf{M} = \langle \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} \mathbf{z} \rangle. \quad (3.158)$$

Эти соотношения можно рассматривать как интегральные уравнения для определения $\boldsymbol{\tau}$. Конечно, они не имеют единственного решения. Перепишем уравнение (3.158) в эквивалентной форме

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \int_{-h_1}^{h_2} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} \mathbf{d}z, \quad -\mathbf{M} \cdot \mathbf{c} = \int_{-h_1}^{h_2} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} \mathbf{z} \mathbf{d}z, \quad (3.159)$$

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \int_{-h_1}^{h_2} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \mathbf{d}z. \quad (3.160)$$

Соотношения (3.159) включают только плоскую часть тензора $\boldsymbol{\tau}$: напряжения $\tau^{11}, \tau^{12}, \tau^{22}$, а (3.160) перерезывающие касательные напряжения τ^{13} и τ^{23} . Напряжения $\tau^{33}, \tau^{31}, \tau^{32}$ не входят в (3.159)–(3.160) и поэтому не могут быть найдены. Будем искать решение (3.159) в виде разложений по полиномам Лежандра, образующим полную ортогональную систему функций на интервале $-h_1 \leq z \leq h_2$.

Для простоты ограничимся случаем $h_1 = h_2 = h/2$. Тогда полиномы Лежандра на этом интервале выражаются формулами

$$P_0 = 1, \quad P_1 = z, \quad P_2 = z^2 - \frac{h^2}{12}. \quad (3.161)$$

Полиномы $P_n (n \geq 3)$ ортогональны (3.161).

Напишем разложение

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 z + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{q}_n P_n(z).$$

Подставляя это разложение в (3.159), видим, что коэффициенты $\mathbf{q}_n (n \geq 2)$ остаются произвольными, а для \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 получаем формулы

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{h} \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{q}_2 = -\frac{12}{h^3} \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}.$$

Итак, получили следующее представление для плоской части тензора напряжений

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h} \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} - \left(\frac{2z}{h} \right) \frac{6}{h^2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{c} + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{q}_n P_n(z), \quad (3.162)$$

где последнее слагаемое остается неопределенным

$$\mathbf{q}_n = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} P_n(z) dz \left[\int_{-h/2}^{h/2} P_n^2(z) dz \right]^{-1}, \quad n \geq 2.$$

Привести какие-либо оценки для последнего слагаемого в выражении (3.162) в общем случае невозможно. Обычно считается допустимым это слагаемое отбросить, поскольку оно описывает быстро меняющиеся по толщине напряженные состояния, максимальные значения которых сравнимы с первыми двумя слагаемыми только в специально подобранных случаях, когда тензоры $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$ и $\mathbf{M} \cdot \mathbf{c}$ являются малыми. Представление тензора $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}$ в виде разложения по полиномам Лежандра не является обязательным. Здесь многое зависит от физического содержания задачи. например, для трехслойных оболочек с жесткими внешними слоями и мягким внутренним слоем напряжения по сечению часто лучше распределять разрывным образом, считая, что внутренний слой не сопротивляется плоским растяжениям — сдвигам. Иными словами, представляется целесообразным оставить проблему восстановления тензора напряжений не формализованной. В этом проявляется основное отличие теории простых оболочек от классической теории оболочек. Первая строится формальными методами, как некая модель. Ее достоверность проверяется следующим образом. Допустим, мы нашли решение одной и той же физической задачи по двумерной и трехмерной теориям, т. е. нашли тензоры \mathbf{T} , \mathbf{M} и $\boldsymbol{\tau}$. Тогда соотношения (3.158) позволяют судить о степени достоверности теории простых оболочек. При классических подходах между теорией оболочек и теорией упругости устанавливается взаимно

однозначное соответствие. В теории простых оболочек однозначное соответствие устанавливается только в одну сторону: от трехмерной теории к двумерной. Обратный переход принципиально неоднозначен. Это можно рассматривать как неустранимый недостаток теории простых оболочек.

Обратимся к построению тензора $\mu\mu^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}$. Для этого представим его, следуя работе В.В. Новожилова и Р.М. Финкельштейна [155], в виде

$$\mu\mu^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 z + \mathbf{q}_3 \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right). \quad (3.163)$$

Поскольку при $z = \pm h/2$ вектор напряжений задан

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}|_{z=h/2} = \boldsymbol{\tau}_n^+, \quad -\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}|_{z=-h/2} = \boldsymbol{\tau}_n^- \quad (3.164)$$

и $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$, то в соответствии с выражением (3.163) имеем

$$(\mu\mu^{-1})_+ \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ = \mathbf{q}_1 + \frac{h}{2}\mathbf{q}_2, \quad (\mu\mu^{-1})_- \cdot \boldsymbol{\tau}_n^- = -\mathbf{q}_1 + \frac{h}{2}\mathbf{q}_2, \quad (3.165)$$

где $(\mu\mu^{-1})_{+(-)} = (\mu\mu^{-1})|_{z=+(-)h/2}$.

Из уравнений (3.165) находим

$$\mathbf{q}_1 = (\mu\mu^{-1})_+ \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ - (\mu\mu^{-1})_- \cdot \boldsymbol{\tau}_n^-, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{h} [(\mu\mu^{-1})_+ \cdot \boldsymbol{\tau}_n^+ + (\mu\mu^{-1})_- \cdot \boldsymbol{\tau}_n^-]. \quad (3.166)$$

Подставляя выражения (3.163) и (3.166) в (3.160) и определяя \mathbf{q}_3 , приходим к окончательной формуле (3.165)

$$\mu\mu^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{2z}{h} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \mathbf{q}_1 + z\mathbf{q}_2 + \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \mathbf{N}, \quad (3.167)$$

где \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 определены формулами (3.166).

Что касается нормального напряжения $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = \tau^{33}$, то оно не может быть найдено по тензорам \mathbf{T} и \mathbf{M} , и при его определении можно следовать традиционным путем.

3.16. Основные соотношения в линиях главной кривизны

Выберем в качестве базисных векторов на несущей поверхности главные оси второго метрического тензора \mathbf{b} . Обозначим их через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Нормаль \mathbf{n} направим так, чтобы тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ была правой. Все встречающиеся тензоры представим в базисе:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{c} = -\mathbf{a} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{R_1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{R_2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (3.168)$$

где R_1, R_2 — радиусы главных кривизн.

Векторы смещения и поворота точек несущей поверхности представим в виде

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\varphi} = -\varphi_2 \mathbf{e}_1 + \varphi_1 \mathbf{e}_2 + \Omega \mathbf{n}. \quad (3.169)$$

Оператор-градиент имеет вид

$$\nabla = \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha = \frac{1}{A_1} \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{A_2} \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad (3.170)$$

где $A_\alpha = |\mathbf{r}_\alpha| = |\partial_\alpha \mathbf{r}|$ — коэффициенты Ламе.

Тензоры деформации допускают представления

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + w_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + w_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{n}, \quad (3.171)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = -\tau_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \kappa_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \kappa_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \tau_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\nabla \Omega + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \otimes \mathbf{n}, \quad (3.172)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} u_2 + \frac{w}{R_1}; & w_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} u_1 - \Omega; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} u_1 + \frac{w}{R_2}; & w_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} u_2 + \Omega; \\ \gamma_\alpha &= \varphi_\alpha - \vartheta_\alpha; & \vartheta_\alpha &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x^\alpha} + \frac{u_\alpha}{R_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2); \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \varphi_2; & \tau_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \varphi_1 - \frac{\Omega}{R_1}; \\ \kappa_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \varphi_1; & \tau_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \varphi_2 + \frac{\Omega}{R_2}. \end{aligned}$$

Приведенные тензоры деформации имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \varepsilon_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2; \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2; \quad (3.174)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2; \quad (3.175)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = -\left(\tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} - \frac{\omega}{2R_1}\right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \kappa_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \kappa_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \left(\tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2} - \frac{\omega}{2R_2}\right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (3.176)$$

В предыдущих формулах обозначения компонент тензоров деформации выбраны так, чтобы при принятии гипотез Киргхгофа — Лява они переходили в обозначения книги В.В.Новожилова [159].

При принятии упомянутых гипотез имеем

$$\boldsymbol{\gamma} = 0 \Rightarrow \gamma_\alpha = 0 \Rightarrow \varphi_\alpha = \vartheta_\alpha. \quad (3.177)$$

Кроме того, уравнение неразрывности (3.154) в компонентной записи принимает вид

$$\tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2} - \tau_1 - \frac{\omega_2}{R_1} = 0$$

и позволяет ввести в рассмотрение функцию кручения τ

$$\tau = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2}. \quad (3.178)$$

Таким образом, число деформационных переменных в теории типа Лява уменьшается до шести: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \boldsymbol{\omega}, \kappa_1, \kappa_2, \tau$. В дальнейшем будут использоваться обозначения

$$\delta_1 = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} - \frac{\omega}{2R_1}; \quad \delta_2 = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2} - \frac{\omega}{2R_2}. \quad (3.179)$$

Тензор усилий в компонентном представлении имеет вид

$$\mathbf{T} = T_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (N_1 \mathbf{e}_1 + N_2 \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{n}. \quad (3.180)$$

Чтобы совместить обозначения компонент тензора моментов с традиционными, поступаем следующим образом:

$$\langle \mu \mu^{-1} \cdot \tau z \rangle \cdot \mathbf{a} = M_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + M_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + M_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.$$

Тогда для \mathbf{M} имеем

$$\mathbf{M} = -M_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + M_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - M_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + M_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (3.181)$$

Из уравнений (3.180) и (3.181) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} &= T_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \left(T_{12} - \frac{M_{21}}{2R_2} + \frac{M_{12}}{2R_1} \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \\ &+ \left(T_{21} + \frac{M_{21}}{2R_2} - \frac{M_{12}}{2R_1} \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (3.182)$$

В силу шестого уравнения равновесия этот тензор симметричен.

Соотношения упругости в тензорной записи имеют вид

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = T_0 + C_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + C_2 \cdot \cdot \boldsymbol{\kappa} + C_5 \mathbf{a} \left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right), \quad (3.183)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + G h \Gamma_0 \boldsymbol{\gamma}; \quad (3.184)$$

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M}_0^T + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot C_2 + C_3 \cdot \cdot \boldsymbol{\kappa} + C_6 \mathbf{c}^T (t_1 - t_2). \quad (3.185)$$

Подставляя в уравнения (3.183)–(3.185) выражения (3.141)–(3.143), а также (3.120)–(3.122) и записывая получившиеся равенства в компонентном виде, приходим к формулам

$$\begin{aligned} T_1 &= h L_1 \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-) + \frac{Eh}{1-\nu^2} [A_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + A_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \{2hH[-\tilde{B}_1(\kappa_1 + \kappa_2) + \\ &+ \tilde{B}_2(\kappa_1 - \kappa_2)] + 2hH_1[\tilde{B}_3(\kappa_1 - \kappa_2) - B_5(\kappa_1 + \kappa_2)]\} + C_5 \left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right) + L_1^* \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_* \tilde{\rho} z \rangle, \end{aligned} \quad (3.186)$$

$$T_{12} - \frac{M_{21}}{2R_2} + \frac{M_{12}}{2R_1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} A_2 \omega + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} [2hH\tilde{B}_2(\delta_1 + \delta_2) + 2hH_1\tilde{B}_4(\delta_2 - \delta_1)], \quad (3.187)$$

$$N_1 = L_3 h \mathbf{e}_1 \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-) + L_3^* \langle \tilde{\rho} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}_* z \rangle + G h \Gamma_0 \gamma_1, \quad (3.188)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= h^2 L_2 \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ + \boldsymbol{\tau}_n^-) + h^2 L_2^* \langle \tilde{\rho} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_* \rangle + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \{2hH[-B_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + B_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] + \\ &+ 2hH_1[B_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - B_5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]\} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [C_1(\kappa_1 + \kappa_2) + C_2(\kappa_1 - \kappa_2)] + C_6(t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (3.189)$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [C_2(\delta_1 + \delta_2) + h^2 H_1^2 C_4(\delta_1 - \delta_2)] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (2HB_2 - 2H_1B_4) \omega. \quad (3.190)$$

Тильды над модулями B_k поставлены для удобства сравнения с другими вариантами теории оболочек. В нашей теории $\tilde{B}_k \equiv B_k$. Остальные пять соотношений упругости получаются из выражений (3.186)–(3.190) заменой индексов $1 \rightleftharpoons 2$. При этом индексы у модулей и температур остаются неизменными, а для \mathbf{N} нужно использовать формулу (3.184).

3.17. Простейшая теория оболочек

Простейшей уместно назвать теорию, которую можно описать, используя наименьшее число отличных от нуля модулей, при этом энергия деформации остается положительно-определенной формой деформационных переменных.

Примем

$$B_k = C_4 = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (3.191)$$

Энергией деформации называется квадратичная по тензорам деформации часть свободной энергии

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \cdot C_1 \cdot \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \cdot C_2 \cdot \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \cdot C_3 \cdot \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.192)$$

В данном случае ее можно переписать в виде

$$2W = \frac{Eh}{1-\nu^2} [A_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + A_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + A_2\omega^2] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [C_1(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + C_2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 + C_2(\delta_1 + \delta_2)^2] + Gh\Gamma_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \quad (3.193)$$

Необходимые и достаточные условия положительности (3.193) даются неравенствами

$$A_\alpha > 0, \quad C_\alpha > 0, \quad \Gamma_0 > 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.194)$$

Обращение (3.193) в нуль возможно только при выполнении равенств

$$\varepsilon_\alpha = \omega = 0, \quad \kappa_\alpha = \delta_1 + \delta_2 = 0, \quad \gamma_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.195)$$

Уравнение неразрывности (3.154) при этом сводится к условию

$$\text{tr } \mathbf{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 - \delta_1 = 0. \quad (3.196)$$

Поэтому величины δ_1 и δ_2 также обращаются в нуль. Легко доказать, что энергия деформации простой оболочки обращается в нуль только на жестких движениях. Простейшую теорию оболочек можно применять исключительно для тонких оболочек, когда влиянием тензоров “начальных” напряжений можно пренебречь. Это, в свою очередь, возможно в том случае, когда главный член в асимптотике тензора $\boldsymbol{\tau}$ имеет порядок $O(h^{-1})$ или $O(h^{-2})$, но не $O(1)$.

Примем, что это условие выполнено. Тогда соотношения упругости (3.186)–(3.190) принимают вид

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [A_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + A_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] + C_5 \left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right), \quad (3.197)$$

$$T_{12} - \frac{M_{21}}{2R_2} + \frac{M_{12}}{2R_1} = \frac{Eh}{1-\nu^2} A_2 \omega, \quad (3.198)$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [C_1(\kappa_1 + \kappa_2) + C_2(\kappa_1 - \kappa_2)], \quad (3.199)$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} C_2(\delta_1 + \delta_2), \quad (3.200)$$

$$N_1 = Gh\Gamma_0\gamma_1. \quad (3.201)$$

Последнее равенство можно принять тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\tau}_n^+ - \boldsymbol{\tau}_n^-) = 0, \quad \langle \tilde{\rho}\mathbf{F}_*z \rangle \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (3.202)$$

Простейшая теория тонких оболочек, которую описывают соотношения (3.197)–(3.201), включает деформацию поперечного сдвига. Следует различать два случая:

$$\text{а) } \Gamma_0 \sim 1, \quad \text{б) } \Gamma_0 \ll 1. \quad (3.203)$$

В первом случае (он имеет место, например, для однослойных оболочек) учет деформации поперечного сдвига, как известно, не нужен. Второй случай часто реализуется в трехслойных оболочках — им будет посвящен следующий раздел.

Заметим, что соотношения (3.197)–(3.201) для пластин являются “точными”, поэтому их можно рекомендовать для исследования динамических напряженных состояний в толстых плитах даже в тех случаях, когда $\Gamma_0 \sim 1$, но для толстых оболочек они не удовлетворительны. Таким образом, полные соотношения (3.197)–(3.201) нужно применять либо для расчета толстых плит, либо для расчета тонких оболочек с малой жесткостью на поперечный сдвиг. Для тонких однородных по толщине оболочек эти соотношения можно упростить, используя следующее ограничение. Примем, что жесткость оболочки на поперечный сдвиг бесконечно велика

$$Gh\Gamma_0 \rightarrow \infty.$$

Поскольку при этом перерезывающие силы N_α остаются конечными, то из уравнения (3.201) следует

$$\gamma \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_\alpha = \vartheta_\alpha. \quad (3.204)$$

При этом имеем равенство

$$\delta_1 + \delta_2 = 2\tau + H\omega \quad (3.205)$$

и соотношение (3.200) принимает вид

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{6(1-\nu^2)} C_2 \left(\tau + H \frac{\omega}{2} \right). \quad (3.206)$$

Остальные соотношения внешне не меняются.

Заметим, что при $Gh\Gamma_0 \rightarrow \infty$ энергия деформации поперечного сдвига равна нулю $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$.

Чтобы закончить формулировку простейшей теории простых оболочек, осталось определить модули $A_1, A_2, C_1, C_2, \Gamma_0$. В этом разделе они будут определены для однослойных оболочек. Сравнение простейшей теории с известными вариантами теории простых оболочек будет проведено после определения модулей.

3.18. Частоты и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда

Мы хотим определить “пластинчатые” модули, т. е. модули, которые не исчезают при переходе к пластине. Для этого нужна некая эталонная задача теории упругости, обладающая достаточно широким спектром собственных частот и форм колебаний и допускающая

точное решение. К сожалению, число таких задач невелико и все они относятся к частному случаю краевых условий типа “скользящей заделки”. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения.

Найти в области $-a < x < a$, $-b < y < b$, $-h < z < h$ решения уравнений Ламе

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (1 - 2\nu)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (1 - 2\nu)\gamma \mathbf{u} = 0, \quad \gamma \equiv \frac{\tilde{\rho}\omega^2}{G}, \quad (3.207)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{aligned} x = \pm a, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{w} = \sigma_x = 0; \quad y = \pm b, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{w} = \sigma_y = 0; \\ z = \pm h; \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (3.208)$$

Решение задачи (3.207), (3.208) удобно искать в виде потенциалов Гельмгольца

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi, \quad \nabla \cdot \psi = 0, \quad \Psi = \psi_1 \mathbf{e}_1 + \psi_2 \mathbf{e}_2 + \psi_3 \mathbf{n}, \quad (3.209)$$

причем потенциалы φ и ψ являются решениями уравнений

$$2(1 - \nu)\nabla \cdot \nabla\varphi + (1 - 2\nu)\gamma\varphi = 0, \quad \nabla \cdot \nabla\psi_1 + \gamma\psi_1 = 0. \quad (3.210)$$

Для наших целей у нас нет нужды искать все решения задачи (3.207)–(3.208), а достаточно найти такое подмножество решений, которое содержало бы все характерные особенности распределения перемещений по толщине параллелепипеда. В данном случае можно ограничиться построением решений, обладающих заданными свойствами симметрии относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$, а именно будем считать, что нормальное перемещение w — четная функция x и y , перемещение \mathbf{u}_1 — нечетно по x и четно по y , перемещение \mathbf{u}_2 — четно по x и нечетно по y . Как известно, системы функций $1, \cos \lambda_n x, \sin \lambda_n x$ и $1, \cos \mu_m y, \sin \mu_m y$ полны в интервалах $[-a, a]$, $[-b, b]$, соответственно, если

$$\lambda_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2a}, \quad \mu_m = \frac{(2m - 1)\pi}{2b}. \quad (3.211)$$

Поэтому решение задачи (3.207)–(3.208) можно искать в виде разложений по этим функциям. Например, перемещение w (с учетом отмеченных выше свойств симметрии) можно искать в виде разложения

$$w(x, y, z) = w_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n^{(1)} \cos \lambda_n x + w_n^{(2)} \cos \mu_n y) + \sum_{n,m=1}^{\infty} w_{nm}(z) \cos \lambda_n x \cos \mu_m y. \quad (3.212)$$

Легко доказать, что эти ряды сходятся равномерно; тогда из краевых условий (3.208) получаем, что

$$w_0 = w_n^{(1)} = w_n^{(2)} = 0.$$

Аналогично можно представить тангенциальные перемещения:

$$\mathbf{u}_1 = \sum \mathbf{u}_1^{nm}(z) \sin \lambda_n x \cos \mu_m y, \quad \mathbf{u}_2 = \sum \mathbf{u}_2^{nm}(z) \cos \lambda_n x \sin \mu_m y. \quad (3.213)$$

Подставляя эти разложения в (3.207), получаем, что $w_{nm}, \mathbf{u}_1^{nm}, \mathbf{u}_2^{nm}$ должны удовлетворять системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Причем, коэффициенты с различными индексами n и m не связаны между собой, т. е. для каждой пары (n, m) получим задачу на собственные значения. Оператор последней является симметричным и положительным, и следовательно, имеет счетное множество решений. В литературе [67]

эти решения принято называть модами. Таким образом, каждая мода является двухпараметрическим набором решений. Задачей этого раздела является построение всех мод колебаний параллелепипеда, обладающих заданными свойствами симметрии по переменным x и y . В дальнейшем параметры (индексы n и m) будем для краткости записи опускать. Решение будем искать в виде потенциалов, которые, очевидно, достаточно выбрать так:

$$\begin{aligned}\varphi &= \Phi(z) \cos \lambda x \cos \mu y, & \psi_1 &= \Psi_1(z) \cos \lambda x \sin \mu y, \\ \psi_2 &= \Psi_2(z) \sin \lambda x \cos \mu y, & \psi_3 &= \Psi_3(z) \sin \lambda x \sin \mu y.\end{aligned}\quad (3.214)$$

Подставляя уравнение (3.214) в (3.210), получаем следующую систему уравнений для определения функций $\Phi(z)$ и $\Psi_k(z)$

$$\Phi'' + d_1^2 \Phi = 0, \quad \Psi_k'' + d_2^2 \Psi_k = 0, \quad \Psi_3' = \lambda \Psi_1 + \mu \Psi_2, \quad (3.215)$$

где

$$d_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\gamma - \alpha^2, \quad d_2 = \gamma - \alpha^2, \quad \alpha^2 = \lambda^2 + \mu^2, \quad f' \equiv \frac{df}{dz}. \quad (3.216)$$

При $z = \pm h$ функции Φ и Ψ_k должны удовлетворять следующим краевым условиям

$$\begin{aligned}(\gamma - 2\alpha^2)\Phi + 2\mu\Psi_1 - 2\lambda\Psi_2 &= 0, \\ 2\mu\Phi' + (\gamma - 2\mu^2)\Psi_1 + 2\lambda\mu\Psi_2 &= 0, \\ -2\lambda\Phi' + 2\lambda\mu\Psi_1 + (\gamma - 2\lambda^2)\Psi_2 &= 0.\end{aligned}\quad (3.217)$$

Решения задачи (3.215)–(3.217) распадаются на два класса. К первому относятся так называемые антиплоские или изгибные колебания, причем потенциалы удовлетворяют соотношениям

$$\Phi(z) = -\Phi(-z), \quad \Psi_3(z) = -\Psi_3(-z), \quad \Psi_\alpha(z) = \Psi_\alpha(-z) \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.218)$$

Ко второму классу относятся плоские или продольно-сдвиговые колебания, а потенциал имеет свойство

$$\Phi(z) = \Phi(-z), \quad \Psi_3(z) = \Psi_3(-z), \quad \Psi_\alpha(z) = -\Psi_\alpha(-z) \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.219)$$

Для антиплоских колебаний легко получаются следующие два уравнения для определения собственных чисел γ :

$$(\gamma - 2\alpha^2)^2 \sin d_1 h \cos d_2 h + 4\alpha^2 d_1 d_2 \cos d_1 h \sin d_2 h = 0, \quad (3.220)$$

$$\cos d_2 h = 0. \quad (3.221)$$

Для плоских колебаний получаются уравнения

$$(\gamma - 2\alpha^2)^2 \cos d_1 h \sin d_2 h + 4\alpha^2 d_1 d_2 \sin d_1 h \cos d_2 h = 0, \quad (3.222)$$

$$\sin d_2 h = 0. \quad (3.223)$$

Уравнения (3.220) и (3.221) в литературе носят название уравнений Релея — Лэмба. Исследованию корней этих уравнений посвящена обширная литература. Однако в данной работе они рассматриваются с иной точки зрения, а именно обычно ищут корни (3.220) и (3.221), считая γ заданным, а α^2 — неизвестными. Здесь ситуация обратная: известна

α^2 , неизвестна γ . Кроме того, нас будут интересовать только низшие формы колебаний, а именно такие, когда выполнено условие

$$\alpha^2 h^2 \equiv p \ll 1, \quad \alpha^2 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4a^2} + \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4b^2}. \quad (3.224)$$

Займемся теперь изучением уравнения (3.220). Для этого перепишем его в несколько ином виде. Введем обозначения

$$\nu_0 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad \gamma = \alpha^2 \frac{q}{p}, \quad p \equiv \alpha^2 h^2. \quad (3.225)$$

В этих обозначениях уравнение (3.220) принимает вид

$$(q-2p)^2 \sin \sqrt{\nu_0 q - p} \cos \sqrt{q-p} + 4p \sqrt{(\nu_0 q - p)(q-p)} \times \\ \times \sin \sqrt{q-p} \cos \sqrt{\nu_0 q - p} = 0, \quad (3.226)$$

из которого сразу видно, что оно имеет корень $\nu_0 q - p$. Однако легко убедиться, что в этом случае исходная краевая задача имеет только тривиальное решение, поэтому в дальнейшем будем считать, что выполнено условие

$$\nu_0 q - p \neq 0. \quad (3.227)$$

Итак, будем искать корни уравнения (3.226) при малых значениях p , удовлетворяющих условию (3.227). Прежде всего, необходимо убедиться в том, что при $p \rightarrow 0$ все корни уравнения (3.226) ограничены. Допустим обратное. Тогда при малых p уравнение (3.226) переходит в $\cos \sqrt{q} = 0$, но это уравнение имеет корни, ограниченные при $p \rightarrow 0$. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение. Обратим внимание, что ограниченность собственных чисел q при $p \rightarrow 0$ не влечет за собой ограниченность собственных чисел γ , как это видно из (3.225). Будем искать корни уравнения (3.226) в виде асимптотического разложения

$$q(p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n. \quad (3.228)$$

Конечно, нас будут интересовать только первые члены этого разложения. Проще всего находится коэффициент c_0 . Для этого достаточно в уравнении (3.226) положить $p = 0$. Тогда получим

$$c_0^2 \sin \sqrt{\nu_0 c_0} \cos \sqrt{c_0} = 0. \quad (3.229)$$

Из этого уравнения видим, что возможны следующие значения для c_0 :

$$c_0 = 0, \quad \sqrt{\nu_0 c_0} = s\pi, \quad \sqrt{c_0} = \frac{(2s-1)\pi}{2}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.230)$$

Рассмотрим первую из этих возможностей. Пусть $c_0 = 0$. Тогда q имеет вид $q = c_1 p + O(p^2)$, а уравнение (3.226) при малых p можно записать так

$$(c_1 - 2)^2 \sin(\sqrt{\nu_0 c_1 - 1} \sqrt{p}) \cos \sqrt{(c_1 - 1)p} + \\ 4\sqrt{(\nu_0 c_1 - 1)(c_1 - 1)} \sin \sqrt{(c_1 - 1)p} \cos \sqrt{(\nu_0 c_1 - 1)p} = 0.$$

Деля это уравнение на \sqrt{p} и затем переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, получаем

$$\sqrt{(\nu_0 c_1 - 1)} c_1^2 = 0.$$

Это уравнение выполнено, если либо $\nu_0 c_1 = 1$, либо $c_1 = 0$. Первая из этих возможностей неинтересна, поскольку она приводит к нарушению условия (3.227), поэтому рассмотрим случай $c_1 = 0$. Будем искать корни уравнения (3.226) вида $q = c_2 p^2 + O(p^3)$. Подставляя это значение в (3.226), деля полученное уравнение на $p^4 \sqrt{p}$ и переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, получим следующее значение для коэффициента c_2 :

$$c_2 = \frac{4(1 - \nu_0)}{3} = \frac{2}{3(1 - \nu)} \Rightarrow q = \frac{2p^2}{3(1 - \nu)} + O(p^3). \quad (3.231)$$

Аналогичным образом можно найти коэффициент c_3 . Окончательно для q примем следующее выражение:

$$q = \frac{4(1 - \nu_0)p^2}{3} \left[1 - \left(\frac{7}{60} + \frac{1 - \nu_0}{3} \right) (2h\alpha)^2 + O(\alpha^4 h^4) \right]. \quad (3.232)$$

Или, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем следующую формулу для собственной частоты изгибных колебаний:

$$2hp\omega^2 = \frac{E(2h)^3}{12(1 - \nu^2)} \alpha^4 \left[1 - \left(\frac{7}{60} + \frac{1}{6(1 - \nu)} \right) 4\alpha^2 h^2 + O(\alpha^4 h^4) \right]. \quad (3.233)$$

Напомним, что эта формула годится только при выполнении условия (3.224), то есть для достаточно малых номеров m и n .

Оставшиеся случаи уравнения (3.230) для нас представляют второстепенный интерес, поэтому их будем изучать только для частного значения коэффициента Пуассона

$$\nu = \frac{1}{3}, \quad \Rightarrow \quad \nu_0 = \frac{1}{4}. \quad (3.234)$$

Если разложение корня уравнения (3.226) начинается с нулевой степени p , т. е. $c_0 \neq 0$, то этот корень будем искать в виде

$$(q)(p) = \beta^2 + \zeta(p), \quad \beta^2 \equiv c_0, \quad \beta \neq 0, \quad (3.235)$$

где поправка $\zeta(p)$ стремится к нулю как первая степень p .

Используя разложения

$$\sqrt{q - p} = \beta + \frac{\zeta - p}{2\beta}, \quad \sqrt{\frac{q}{4} - p} = \frac{1}{2}\beta + \frac{\zeta - 4p}{4\beta}, \quad \left| \frac{\zeta - p}{\beta} \right| \ll 1,$$

разложим функции $\sin \sqrt{q - p}$, $\cos \sqrt{q - p}$ и так далее в ряды по малому параметру $(\zeta - p)/2\beta$ или $(\zeta - 4p)/4\beta$. В результате получим разложения

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{q - p} &= \sin \beta + \frac{(\zeta - p)}{2\beta} \cos \beta + O(p^2), \\ \cos \sqrt{q - p} &= \cos \beta - \frac{(\zeta - p)}{2\beta} \sin \beta + O(p^2), \\ \cos \sqrt{\frac{q}{4} - p} &= \cos \frac{\beta}{2} - \frac{(\zeta - 4p)}{4\beta} \sin \frac{\beta}{2} + O(p^2), \\ \sin \sqrt{\frac{q}{4} - p} &= \sin \frac{\beta}{2} + \frac{(\zeta - 4p)}{4\beta} \cos \frac{\beta}{2} + O(p^2). \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в (3.226) с учетом требования обращения в нуль двух первых коэффициентов разложений по степеням p , получаем следующие формулы для корней уравнения (3.226):

$$\frac{\rho\omega^2}{G} = \left\{ \frac{(2s-1)^2\pi^2}{4h^2} + \left[1 - \frac{4(-1)^s}{(2s-1)\pi} \right] \alpha^2 + \alpha^2 O(\alpha^2 h^2) \right\}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.236)$$

$$\frac{\rho\omega^2}{G} = 4 \left[\frac{s^2\pi^2}{h^2} + \alpha^2 + \alpha^2 O(\alpha^2 h^2) \right], \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (3.237)$$

Напомним, что эти формулы получены для частного значения коэффициента Пуассона, от которого зависят малые поправки в формулах (3.236) и (3.237). Для произвольного значения коэффициента Пуассона формулы получены в работе [95]. Для нас формулы (3.236) и (3.237) являются вполне достаточными, поскольку они в любом случае не могут быть получены в рамках двумерной теории.

Корни уравнения (3.221) находятся по формуле

$$\frac{\rho\omega^2}{G} = \frac{(2s-1)^2}{(2h)^2} + \alpha^2, \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (3.238)$$

Так же легко находятся корни уравнения (3.223). Они имеют вид

$$\frac{\rho\omega^2}{G} = \frac{4s^2\pi^2}{(2h)^2} + \alpha^2, \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (3.239)$$

Корни уравнения (3.222) находятся аналогично корням уравнения (3.220), поэтому приведем для них только окончательные формулы:

$$\rho\omega^2 = G\alpha^2, \quad (3.240)$$

$$\frac{\rho\omega^2}{G} = \alpha^2 \left[\frac{2}{1-\nu} - \frac{1}{4}\alpha^2 h^2 + O(\alpha^4 h^4) \right]. \quad (3.241)$$

В последней формуле значение поправочного коэффициента приведено при значении $\nu = 1/3$ ($\nu_0 = 1/4$). В общем случае коэффициент $(-1/4)$ при $\alpha^2 h^2$ необходимо заменить на величину c_2 , которая определяется из линейного уравнения

$$4(1-\nu_0)c_2 = (c_1-2)^2 \frac{(1+3\nu_0)c_1-4}{6} - 4(1-\nu_0c_1) \frac{(3+\nu_0)c_1-4}{6}, \quad c_1 = 4(1-\nu_0). \quad (3.242)$$

Формулами (3.240) и (3.241) даются низшие спектры, вытекающие из уравнения (3.222). Высокие частоты определяются только для значения $\nu = 1/3$ (для простоты) и выражаются формулой

$$\frac{\rho\omega^2}{G} = \frac{4s^2\pi^2}{h^2} + \alpha^2 + \alpha^2 O(\alpha^2 h^2), \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (3.243)$$

Этот спектр совпадает с уже полученным ранее спектром (3.237), однако соответствует другому типу колебаний.

Приведенной формулой заканчивается определение всех собственных частот параллелепипеда. Не будем выписывать соответствующие формы колебаний, они могут быть найдены в работе [95].

Подведем некоторые итоги. Для каждого фиксированного значения параметра α^2 , характеризующего распределение амплитуд вдоль плоскости xy , выше было получено

счетное множество собственных частот. Каждой из последних соответствует своя мода колебаний, т. е. трехмерное тело характеризуется счетным множеством мод колебаний. В свою очередь, каждая мода (или каждая частота) зависит от двух параметров m и n , объединенных параметром α^2 . Зависимость частоты от параметров m и n называется дисперсионной поверхностью. Таким образом, трехмерное тело характеризуется счетным множеством дисперсионных поверхностей, которое можно изобразить в осях m^2 , n^2 , ω^2 , одну над другой. Каждой дисперсионной поверхности соответствует счетное множество собственных частот (при различных значениях m и n), которое называется модовым спектром. Полный частотный спектр трехмерного тела расслаивается на счетное множество модовых спектров. С асимптотической точки зрения модовые спектры различаются своим поведением при h , стремящемся к нулю, а именно имеется спектр порядка $O(h^2)$, два спектра $O(h^0)$ и счетное множество спектров $O(h^{-2})$. Для удобства выпишем все эти спектры в порядке возрастания частот:

$$2h\rho\omega^2 = \frac{E(2h)^3}{12(1-\nu^2)}\alpha^4 \left[1 - \left(\frac{7}{60} + \frac{1}{6(1-\nu)} \right) 4\alpha^2 h^2 + O(\alpha^4 h^4) \right], \quad (3.244)$$

$$2h\rho\omega^2 = 2hG\alpha^2, \quad (3.245)$$

$$2h\rho\omega^2 = 2hG\alpha^2 \left[\frac{2}{1-\nu} - \frac{1}{4}\alpha^2 h^2 + O(\alpha^4 h^4) \right], \quad (3.246)$$

$$2h\rho\omega^2 = 2hG \left[\frac{\pi^2}{4h^2} + \alpha^2 \right], \quad (3.247)$$

$$2h\rho\omega^2 = 2hG \left[\frac{\pi^2}{4h^2} + \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \alpha^2 + \alpha^2 O(\alpha^2 h^2) \right], \quad (3.248)$$

$$2h\rho\omega^2 = 2hG \left(\frac{4\pi^2}{4h^2} + \alpha^2 \right). \quad (3.249)$$

Здесь выписаны только шесть низших спектров или дисперсионных поверхностей. Причем, (3.244) соответствует (3.233); (3.245)–(3.240); (3.246)–(3.241); (3.247) соответствует (3.238) при $s = 1$, (3.248) соответствует (3.236) при $s = 1$, (3.249) соответствует (3.239) при $s = 1$. Имеется еще счетное множество дисперсионных поверхностей, расположенных выше поверхностей (3.244)–(3.249), они не описываются теорией простых оболочек (пластин). Последний вопрос мы подробно обсудим в следующем разделе.

3.19. Определение главных модулей упругости

Рассмотрим теперь задачу, исследованную в предыдущем разделе с позиций теории пластин. Уравнения движения, точнее уравнения для амплитуд, имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \tilde{\rho}h\omega^2 \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \frac{\tilde{\rho}h^3}{12} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (3.250)$$

Тензоры деформации вычисляются через векторы \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$ по формулам (3.173). В данном случае они имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \gamma_1 = \varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_2 = \varphi_2 + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \delta_1 = \tau_1 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \kappa_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \delta_2 = \tau_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}. \quad (3.251)$$

Соотношения упругости даются формулами

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [(A_1 + A_2)\varepsilon_1 + (A_1 - A_2)\varepsilon_2], \\ T_{12} = T_{21} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} A_2 \omega, \quad N_\alpha = Gh\Gamma_0 \gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \\ M_{12} = M_{21} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} C_2 (\delta_1 + \delta_2), \quad M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(C_1 + C_2)\kappa_1 + (C_1 - C_2)\kappa_2]. \end{aligned} \quad (3.252)$$

Краевые условия в этой задаче имеют вид

$$x = \pm a : u_2 = w = 0, \quad T_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad M_1 = 0; \quad (3.253)$$

$$y = \pm b : u_1 = w = 0, \quad T_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad M_2 = 0. \quad (3.254)$$

Решение задачи (3.250)–(3.254) ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b}, \\ u_2 &= U_2 \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2b}, \\ w &= W \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b}. \end{aligned} \quad (3.255)$$

Здесь ищется решение, удовлетворяющее тем же условиям симметрии, что и в предыдущем разделе.

Подставляя (3.251)–(3.255) в уравнение (3.250), получим систему пяти однородных уравнений. Приравнявая ее определитель нулю и находя корни частотного уравнения, получаем следующие пять спектров:

$$h\tilde{\rho}\omega^2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (C_1 + C_2) \alpha^4 \left[1 - \frac{2(C_1 + C_2) + (1-\nu)\Gamma_0}{12\Gamma_0(1-\nu)} \alpha^2 h^2 + O(\alpha^4 h^4) \right], \quad (3.256)$$

$$h\tilde{\rho}\omega^2 = Gh \frac{2A_2}{1-\nu} \alpha^2, \quad (3.257)$$

$$h\tilde{\rho}\omega^2 = Gh \frac{2(A_1 + A_2)}{1-\nu} \alpha^2, \quad (3.258)$$

$$h\tilde{\rho}\omega^2 = Gh \left[\frac{12}{h^2} \frac{1-\nu}{2} \frac{\Gamma_0}{C_2} + \alpha^2 \right], \quad (3.259)$$

$$h\tilde{\rho}\omega^2 = Gh \left[\frac{12}{h^2} \Gamma_0 + \frac{2(C_1 + C_2) + (1-\nu)\Gamma_0}{1-\nu} \alpha^2 + O(\alpha^2 h^2) \right], \quad (3.260)$$

где использовано прежнее обозначение для α^2 :

$$\alpha^2 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4a^2} + \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4b^2}.$$

Естественно потребовать, чтобы при $h \rightarrow 0$ дисперсионные поверхности (3.256)–(3.260) совпадали с пятью низшими дисперсионными поверхностями (3.244)–(3.248). Тогда получаем следующие значения для модулей. Следует обратить внимание, что в предыдущем разделе толщина пластины была обозначена через $2h$, а не через h

$$C_1 + C_2 = 1, \quad A_2 = \frac{1-\nu}{2}, \quad A_1 + A_2 = 1, \quad 6(1-\nu)\Gamma_0 = \pi^2 C_2, \quad 12\Gamma_0 = \pi^2.$$

Или в явном виде

$$A_1 = C_1 = \frac{1+\nu}{2}, \quad A_2 = C_2 = \frac{1-\nu}{2}, \quad \Gamma_0 = \frac{\pi^2}{12}. \quad (3.261)$$

Подставляя эти значения модулей в (3.256)–(3.260), получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} h\tilde{\rho}\omega^2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\alpha^4 \left[1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{\pi^2(1-\nu)} \right) \alpha^2 h^2 + O(\alpha^4 h^4) \right], \\ h\tilde{\rho}\omega^2 &= Gh\alpha^2, \quad \tilde{\rho}\omega^2 = G\frac{2\alpha^2}{1-\nu}, \quad \tilde{\rho}\omega^2 = G\left(\frac{2\pi^2}{h^2} + \alpha^2 \right), \\ h\tilde{\rho}\omega^2 &= Gh \left[\frac{\pi^2}{h^2} + \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{2}{1-\nu} \right) \alpha^2 + \alpha^2 O(\alpha^2 h^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.262)$$

Сравнивая формулы (3.262) с соответствующими спектрами (3.244)–(3.248), видим, что дисперсионные поверхности теории оболочек (пластин) во всех случаях лежит несколько выше соответствующих дисперсионных поверхностей теории упругости. При $h \rightarrow 0$ соответствующие дисперсионные поверхности сливаются. Полученные результаты соответствуют интуитивным или физическим представлениям.

Значения модулей A_1, A_2, C_1, C_2 , из формул (3.261) не вызывают сомнений, ибо они могут быть получены многими способами и совпадают во всех существующих вариантах теории оболочек. Иначе обстоит дело с определением коэффициента поперечного сдвига Γ_0 . Выше для Γ_0 было получено значение

$$\Gamma_0 = \frac{\pi^2}{12}, \quad (3.263)$$

которое впервые было предложено Р. Миндлиным [259] в 1951г. и мало отличается от известного значения Э. Рейсснера: $\Gamma_0 = 5/6$. Можно определить Γ_0 несколько иначе, а именно определим (3.256) с ошибкой $O(\alpha^4 h^4)$. Тогда приходим к следующему значению:

$$\frac{5}{60} + \frac{1}{6(1-\nu)\Gamma_0} = \frac{7}{60} + \frac{1}{6(1-\nu)} \Rightarrow \Gamma_0 = \frac{5}{6-\nu}. \quad (3.264)$$

Это значение, видимо, до сих пор не встречалось в литературе. Можно предположить, что для Γ_0 справедливо неравенство

$$\frac{\pi^2}{12} \leq \Gamma_0 < 1. \quad (3.265)$$

В левой части этого неравенства стоит жесткость пластины на поперечный сдвиг, когда возбуждается низшая поперечно-сдвиговая мода колебаний. Очевидно, что сопротивление пластины любым другим видом нагрузки будет больше. Правое ограничение в неравенстве (3.265) получено согласно требованиям строгой гиперболичности уравнений

движения пластины. Это требование, вообще говоря, не является обязательным для физической теории. Однако уравнения движения в линейной теории упругости являются, как известно, строго гиперболическими, поэтому и для уравнений теории пластин можно принять это же свойство. Важно подчеркнуть, что Γ_0 не допускает однозначного определения. Это означает, что теория типа Тимошенко, в отличие от теории типа Лява, не является универсальной и ее формулировка до некоторой степени зависит от преследуемых целей. Хотя, как это видно из (3.265), неоднозначность в определении Γ_0 лежит в сравнительно узком интервале. Вероятно, предпочтение все же следует отдать формуле (3.263). В поддержку этой формулы говорит то, что она приводит к лучшему определению высших спектров. В низшем спектре коэффициент при поправочном слагаемом получается с некоторой ошибкой. Например, запишем первый спектр в (3.262) в следующем виде:

$$h\tilde{\rho}\omega^2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\alpha^4 \left[1 - \left(\frac{7}{60} + \frac{1}{6(1-\nu)} \right) \beta \alpha^2 h^2 + O(\alpha^4 h^4) \right], \quad (3.266)$$

где

$$\beta = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6(1-\nu)} \frac{1}{\Gamma_0} \right) \left[\frac{7}{60} + \frac{1}{6(1-\nu)} \right]^{-1}. \quad (3.267)$$

Если $\Gamma_0 = 5/6(1-\nu)$, то $\beta = 1$, если $\Gamma_0 = \pi^2/12$, то $\beta = 1,05$, принято $\nu = 0,3$. С инженерной точки зрения “ошибка” в коэффициенте при поправочном слагаемом совершенно несущественна.

Из сказанного выше вытекает важное следствие: невозможно построить универсальную уточненную в асимптотическом смысле теорию пластин, это тем более верно для теории оболочек.

Под уточненной в асимптотическом смысле теорией понимается, грубо говоря, совпадение двух первых членов асимптотических разложений тех или иных характеристик трехмерной задачи с соответствующими величинами двухмерной. Например, в качестве упомянутой характеристики можно взять спектр собственных частот. Высказанное выше утверждение представляется совершенно очевидным, если обратиться к результатам предыдущего раздела. Действительно, там было показано, что весь спектр трехмерного оператора расслаивается на счетное множество спектров. Низший из них имеет асимптотический порядок $O(h^2)$, два следующие — $O(1)$, наконец, счетное множество спектров имеют порядок $O(h^{-2})$.

Теория типа Лява описывает три низших спектра порядка $O(h^2)$ и $O(1)$, остальное она игнорирует. Эта теория может быть асимптотически точной, т. е. давать правильное значение главных членов соответствующих асимптотических разложений. Уточненная в асимптотическом смысле теория должна описывать все спектры следующего порядка, т. е. $O(h^{-2})$, но таких спектров счетное множество. Следовательно, двумерная теория, описывающая эти спектры, должна характеризоваться оператором бесконечного порядка. Известно, что система дифференциальных уравнений в двумерном пространстве эквивалентна системе конечного порядка в трехмерном пространстве. Иными словами, любая асимптотически уточненная теория пластин(оболочек) по необходимости должна совпадать с трехмерной теорией упругости.

Теория типа Тимошенко асимптотически не точнее теории типа Лява, но тем не менее она имеет большую инженерную (не формализуемую) точность. Поясним сказанное простым примером. Пусть даны две функции $F_1 = 1 + ah$ и $F_2 = 1 + 1,05ah$, где $0 < h \ll 1$, и пусть F_2 есть приближение F_1 . С асимптотической точки зрения F_2 приближает F_1 с ошибкой $O(h)$, и поэтому ее следует принять в виде $F_2 = 1$. Однако очевидно, что при немалых значениях ah функция $F_2 = 1 + 1,05ah$ значительно лучше приближает F_1 , чем

$F_2 = 1$. Например, при $ah = 0,5$ $F_2 = 1 + 1,05ah$ приближает F_1 с ошибкой в 1,66 процентов, а $F_2 = 1$ приближает с ошибкой в 33,3 процента.

Это означает, что теория типа Тимошенко не может быть построена на основе использования асимптотических методов в чистом виде, поэтому все попытки этого рода, по нашему мнению, обречены на провал. В этом смысле теория простых оболочек оказывается, возможно, единственным способом построить формально строгую теорию типа Тимошенко.

3.20. Теория “толстых” однослойных оболочек

Выше была изложена схема построения теории термоупругих простых оболочек. Начиная с этого раздела и далее будут рассматриваться только изотермические процессы. В этом случае теория простых оболочек описывается 16 модулями, зависящими только от коэффициента Пуассона. Их можно разделить на три группы: главные, перекрестные и вспомогательные. К главным модулям будем относить

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad \Gamma_0 > 0. \quad (3.268)$$

Эти модули могут быть определены из экспериментов с пластинами. К перекрестным модулям относятся

$$\tilde{B}_1 = B_1, \quad \tilde{B}_2 = B_2, \quad \tilde{B}_3 = B_3, \quad \tilde{B}_4 = B_4, \quad \tilde{B}_5 = B_5. \quad (3.269)$$

Данные модули могут быть найдены только из экспериментов с искривленными оболочками, причем B_1 и B_2 могут быть найдены из экспериментов со сферическими оболочками ($H_1 = 0$), а остальные три — с оболочками, для которых $H_1 \neq 0$, например, цилиндрическими оболочками.

Вспомогательными будем называть модули, входящие в тензоры “начальных” напряжений

$$L_1, \quad L_1^*, \quad L_2, \quad L_2^*, \quad L_3, \quad L_3^*. \quad (3.270)$$

Все они могут быть найдены из экспериментов с пластинами. К сожалению, модули L_i^* нами не определялись, поэтому будем считать, что объемные силы F_* отсутствуют.

Главные модули были найдены для однослойных оболочек в предыдущем разделе и описываются формулами

$$A_1 = C_1 = \frac{1 + \nu}{2}, \quad A_2 = C_2 = \frac{1 - \nu}{2}. \quad (3.271)$$

Эти модули совпадают во всех существующих вариантах теории оболочек. В простейшей теории оболочек, применимой только для действительно тонких оболочек, используют помимо (3.271), следующие значениям модулей:

$$L_i = L_i^* = 0, \quad B_k = 0, \quad \Gamma_0 = \infty, \quad (i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (3.272)$$

Для действительно тонких оболочек простейшая теория, видимо, исчерпывает практические потребности. Однако в инженерной практике часто встречаются толстые оболочки: $h/R \sim 0,1 \div 0,5$.

В этих случаях ссылки на асимптотическую точность становятся бессодержательными. Однако успешный опыт расчета таких конструкций по различным вариантам теории типа Тимошенко показывает их достаточность, по крайней мере, для нахождения первого приближения к определению напряженно-деформированного состояния. Реальная

точность теории типа Тимошенко определяется тем, что она опирается на точную запись основных законов сохранения.

Приведем значения перекрестных и вспомогательных модулей, входящих в соотношения (3.186)–(3.190):

$$L_1 = \frac{\nu}{2(1-\nu)}, \quad L_2 = \frac{\nu}{12(1-\nu)}, \quad L_3 = 1 - \Gamma_0, \quad (3.273)$$

$$B_1 = -\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{1+\nu}{2}, \quad B_4 = -\frac{1-\nu}{4}, \quad B_5 = -\frac{1}{2}, \quad (3.274)$$

$$\Gamma_0^{(1)} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \Gamma_0^{(2)} = \frac{5}{6-\nu}. \quad (3.275)$$

Здесь приведены два значения для коэффициента поперечного сдвига Γ_0 . В теории первого приближения необходимо принять $\Gamma_0 = \Gamma_0^{(1)}$.

В задачах с ярко выраженным изгибом допустимо, и даже рекомендуется, принимать $\Gamma_0 = \Gamma_0^{(2)}$. С инженерной точки зрения уточнение в задачах с ярко выраженным изгибом, достигаемое использованием второго из значений Γ_0 , мало существенно, поэтому “безопаснее” во всех случаях использовать $\Gamma_0^{(1)}$.

Ограниченный объем учебного пособия не позволяет нам подробно описать эксперименты, приводящие к формулам (3.273)–(3.274), поэтому ограничимся только краткими замечаниями. Все эти модули определялись из решения тестовых задач. При этом особое внимание уделялось тому, чтобы эти модули определялись как коэффициенты при главных, а не поправочных, членах тех или иных асимптотических разложений, поэтому для любой теории, описываемой модулями, отличными от (3.273)–(3.275), можно указать задачу, в которой ошибка, даваемая этой теорией, будет в главном члене. Перечислим эксперименты, позволяющие вычислить перекрестные и вспомогательные модули.

Модули B_2 и B_4 могут быть найдены из задачи о чистом кручении полого цилиндра. Модуль B_1 определяется из задачи о сферических симметричных колебаниях полой сферы. В этом случае тензор моментов выражается формулой

$$\mathbf{M}^T = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{2h}{R} \right) B_1 \frac{2w}{R} \mathbf{e}, \quad (3.276)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = w/R$, $2h\mathbf{H} = -2h/R$.

Находя тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ по трехмерной теории и используя формулы связи $\boldsymbol{\tau}$ с \mathbf{M} , а также \mathbf{u} и \mathbf{u}_* , получаем значение модуля B_1 . В формуле (3.276) никаких других модулей, кроме B_1 , не содержится, поэтому B_1 определяет главную часть тензора моментов в этой задаче. Вполне аналогичные рассуждения проводились и в других экспериментах. Модули B_3 и B_5 вычислялись из задачи о чистом изгибе полого цилиндра.

Во всех экспериментах неизбежная ошибка, предполагаемая изложенной выше теорией, не превышала порядка $O(h^2/R^2)$. Для определения вспомогательных модулей необходимо рассматривать задачи с поверхностными нагрузками. В качестве таких задач можно взять задачи Ляме для полых цилиндра и сферы, а также задачу о чистом сдвиге полосы.

Определение модуля C_4 будет обсуждаться далее.

3.21. Положительность энергии деформации

Одним из требований, предъявляемых к энергии деформации, является ее положительность или, при некоторых условиях, — ее неотрицательность.

Энергия деформации может быть записана в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \\ &= W_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2) + W(\omega, \delta_1, \delta_2) + W_3(\gamma_1, \gamma_2), \end{aligned} \quad (3.277)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{2(1-\nu^2)}{Eh} W_1 &= \frac{1+\nu}{2} (y_1^2 + y_3^2) + \frac{1-\nu}{2} (y_2^2 + y_4^2) - \\ &\quad - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \eta y_1 y_3 + (1+\nu) \eta_1 y_1 y_4 - \eta_1 y_2 y_3, \end{aligned} \quad (3.278)$$

$$\frac{2}{Gh} W_2 = \left(y_5 - \frac{1}{2} \eta_1 y_7 \right)^2 + y_6^2 + \left(\frac{6C_4}{1-\nu} - \frac{1}{4} \right) \eta_1^2 y_7^2, \quad (3.279)$$

$$2W_3 = Gh\Gamma_0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \quad (3.280)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} y_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad y_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \sqrt{12}y_3 = -h(\kappa_1 + \kappa_2), \quad \sqrt{12}y_4 = h(\kappa_1 - \kappa_2), \quad y_5 = \omega, \\ \sqrt{12}y_6 &= -h(\delta_1 + \delta_2), \quad \sqrt{12}y_7 = h(\delta_2 - \delta_1), \quad \sqrt{3}\eta = hH, \quad \sqrt{3}\eta_1 = hH_1. \end{aligned} \quad (3.281)$$

Кроме того, в уравнениях (3.277)–(3.280) были использованы значения модулей (3.271) и (3.274). Для положительности W необходимо, чтобы каждая из функций W_i ($i = 1, 2, 3$) была бы положительна. Необходимыми и достаточными условиями положительности W_1 являются неравенства

$$\eta_1^2 < 1 - \nu^2, \quad 1 - \nu^2 - \nu^2 \eta^2 > \frac{1+\nu}{1-\nu} \eta_1^2 (1 - \nu^2 - \eta_1^2), \quad -1 < \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (3.282)$$

Эти неравенства, очевидно, выполняются, если справедливы неравенства

$$\left| \frac{h}{R_1} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{h}{R_2} \right| \leq 1, \quad \nu^2 \leq 0,5. \quad (3.283)$$

Более жесткие ограничения получаются при $-1 < \nu < -1/\sqrt{2}$, однако неизвестно, существуют ли такие материалы.

Функция W_3 положительна при $\Gamma_0 > 0$, а W_2 — при $24C_4 > 1 - \nu$. На самом деле достаточно неотрицательности W_2 , а следовательно, и W , которая достигается при

$$C_4 = \frac{1-\nu}{24}. \quad (3.284)$$

Действительно, минимум W , равный нулю, достигается при следующих значениях деформаций:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \delta_1 + \delta_2 = 0, \quad (3.285)$$

$$4\sqrt{3}\omega = \eta_1(\delta_2 - \delta_1)h. \quad (3.286)$$

С другой стороны, при (3.285) из уравнения неразрывности (3.154) имеем

$$\delta_2 - \delta_1 = -H_1\omega$$

и согласно (3.286) получаем

$$\omega = 0, \quad \delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Поэтому при принятии (3.284) обращение энергии деформации в нуль возможно тогда и только тогда, когда простая оболочка совершает жесткие движения.

Заметим, что при переходе к теории типа Лява, согласно (3.179), (3.178), имеем

$$\delta_1 = \tau - \frac{\omega}{2R_1}, \quad \delta_2 = \tau - \frac{\omega}{2R_2}.$$

Тогда функция W_2 принимает вид

$$\frac{2W_2}{Gh} = \left(1 - \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{6C_4}{4(1-\nu)}\eta_1^4\right) y_5^2 + \left(-\frac{h\tau}{\sqrt{3}} + \frac{\eta y_5}{2}\right)^2. \quad (3.287)$$

Положительность (3.287) обеспечена при

$$C_4 = 0, \quad \eta_1^2 < 2,$$

причем последнее неравенство всегда выполняется, поэтому в теории типа Лява необходимость в C_4 отпадает.

3.22. Описание простого краевого эффекта

В качестве еще одной проверки изложенной выше теории рассмотрим простой краевой эффект в оболочках вращения. Результаты этого раздела были получены в 1978–1979 гг. автором совместно с В.Р. Скворцовым, бывшим в то время студентом ЛПИ им. М.И. Калинина.

В качестве координат на срединной поверхности оболочки вращения примем $x^1 = s$ — расстояние вдоль меридиана, $x^2 = \varphi$ — широтный угол. Предполагается, что поверхностные нагрузки отсутствуют. При осесимметричной деформации имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = u' + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R_2}(u \operatorname{ctg} \theta + w), \quad \gamma_1 = \varphi_1 + w' - \frac{u}{R_1}, \\ \kappa_1 = \varphi_1', \quad \kappa_2 = \varphi_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2}, \quad f' \equiv \frac{df}{ds}. \end{aligned} \quad (3.288)$$

Имеет место уравнение неразрывности

$$\gamma_1 - \varphi_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \operatorname{ctg} \theta + R_2 \varepsilon_2', \quad (3.289)$$

где θ — угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности.

Уравнения статики имеют вид

$$\begin{aligned} T_1' + (T_1 - T_2) \frac{1}{R_2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{R_1} N_1 = 0, \quad N_1' + \frac{1}{R_2} N_1 \operatorname{ctg} \theta - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} = 0, \\ M_1' - \frac{1}{R_2} (M_1 - M_2) \operatorname{ctg} \theta - N_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.290)$$

Соотношения упругости запишем в форме

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\kappa_1 \left(\frac{\tilde{B}_1 - \tilde{B}_2 + \tilde{B}_5 - \tilde{B}_3}{R_1} + \frac{\tilde{B}_1 - \tilde{B}_2 - \tilde{B}_5 - \tilde{B}_3}{R_2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa_2 \left(\frac{\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 + \tilde{B}_5 + \tilde{B}_3}{R_1} + \frac{\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 - \tilde{B}_5 - \tilde{B}_3}{R_2} \right) \Big], \\
M_1 = & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\tilde{B}_1 - \tilde{B}_2 + \tilde{B}_5 - \tilde{B}_3}{R_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\tilde{B}_1 - \tilde{B}_2 - \tilde{B}_5 + \tilde{B}_3}{R_2} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 - \tilde{B}_5 - \tilde{B}_3}{R_1} + \frac{\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 + \tilde{B}_5 + \tilde{B}_3}{R_2} \right) \right], \\
N_1 = & Gh\Gamma_0\gamma_1;
\end{aligned} \tag{3.291}$$

выражения для T_2 и M_2 получаются из T_1 и M_1 соответственно заменой индексов $1 \rightleftharpoons 2$.

Система уравнений (3.288)–(3.291) может быть сведена к двум уравнениям относительно “переменных Мейсснера” [131]: R_2N_1 и φ_1 . Для этого первые два уравнения системы (3.290) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
& [R_2 \sin \theta (T_1 \sin \theta - N_1 \cos \theta)]' = 0, \\
& [R_2 \sin \theta (T_1 \cos \theta + N_1 \sin \theta)]' - T_2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.292}$$

где учтено условие Кодацци–Гаусса

$$\frac{1}{R_2} \frac{dR_2}{ds} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta, \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta}.$$

Полагая нагрузку на граничных параллелях самоуравновешенной (осевая сила равна нулю), получаем выражения для растягивающих усилий

$$T_1 = R_2 N_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2}, \quad T_2 = (R_2 N_1)'. \tag{3.293}$$

Соотношения (3.291) позволяют выразить пять величин ε_2 , $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, M_1 , $M_1 - M_2$, γ_1 через переменные R_2N_1 и φ_1 :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 = & \frac{1}{Eh} \left[(R_2N_1)' - \frac{\nu \operatorname{ctg} \theta}{R_2} R_2N_1 \right] + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \left[\varphi_1' \left(\frac{\tilde{F}_1 - \tilde{F}_3}{R_1} - \frac{\tilde{F}_2 + \tilde{F}_4}{R_2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\varphi_1 \operatorname{ctg} \theta}{R_2} \left(-\frac{\tilde{F}_1 - \tilde{F}_4}{R_1} + \frac{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_3}{R_2} \right) \right], \\
\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = & \frac{1+\nu}{Eh} \left[(R_2N_1)' - R_2N_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} \right] + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \left[\varphi_1' \left(-\frac{\tilde{F}_3}{R_1} - \frac{\tilde{F}_4}{R_2} \right) + \right. \\
& \left. + \varphi_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} \left(\frac{\tilde{F}_4}{R_1} + \frac{\tilde{F}_3}{R_2} \right) \right], \\
M_1 = & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\varphi_1' + \nu \varphi_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} \right] + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \left[(R_2N_1)' \left(\frac{-F_1 + F_3 - F_2 + F_4}{R_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{F_2 + F_4}{R_2} + R_2N_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} \left(-\frac{F_1 + F_3}{R_1} + \frac{F_2 - F_4}{R_2} \right) \right) \right],
\end{aligned}$$

$$M_1 - M_2 = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left[\varphi_1' - \varphi_1 \frac{\text{ctg } \theta}{R_2} \right] + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \left[(R_2 N_1)' \left(\frac{F_3 + F_4 - F_1 - F_2}{R_1} + \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}{R_2} \right) + R_2 N_1 \frac{\text{ctg } \theta}{R_2} \left(-\frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}{R_1} - \frac{-F_1 + F_3 - F_2 + F_4}{R_2} \right) \right],$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{Gh\Gamma_0} \frac{1}{R_2} R_2 N_1, \quad (3.294)$$

где введены обозначения

$$F_1 = (1-\nu)(B_3 - B_1), \quad F_2 = (1+\nu)(B_1 + B_3),$$

$$F_3 = (1-\nu)(B_2 - B_5), \quad F_4 = (1+\nu)(B_2 + B_5) \quad (3.295)$$

и аналогичные для величин с тильдами. Напомним, что тензорная инвариантность требует равенства величин $B_i = \tilde{B}_i$, $F_i = \tilde{F}_i$; тильды поставлены для удобства сравнения с другими вариантами теории оболочек. В соотношениях (3.294) отброшены слагаемые $O(h^2/R^2)$ по сравнению с единицей. Подставляя уравнение (3.294) в (3.289) и последнее из уравнений (3.290), приходим к двум уравнениям в переменных Мейсснера

$$L(R_2 N_1) + \left[\frac{\nu}{R_1 R_2} - \frac{2(1+\nu)}{\Gamma_0 R_2^2} \right] R_2 N_1 = -\frac{Eh}{R_2} \varphi_1 - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\tilde{k} \varphi_1'' + A \varphi_1'],$$

$$L(\varphi_1) - \frac{\nu}{R_1 R_2} \varphi_1 = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3 R_2} R_2 N_1 + \frac{1}{Eh} [k(R_2 N_1)'' + B(R_2 N_1)'], \quad (3.296)$$

где обозначено

$$L \equiv \frac{d^2}{ds^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{R_2} \frac{d}{ds} - \frac{\text{ctg}^2 \theta}{R_2^2}, \quad (3.297)$$

$$k = \frac{F_1 - F_3}{R_1} - \frac{F_2 + F_4}{R_2}, \quad \tilde{k} = \frac{\tilde{F}_1 - \tilde{F}_3}{R_1} - \frac{\tilde{F}_2 + \tilde{F}_4}{R_2}; \quad (3.298)$$

$$A = \left(\frac{\tilde{F}_1 - \tilde{F}_3}{R_1} - \frac{\tilde{F}_2 + \tilde{F}_4}{R_2} \right) + \frac{\text{ctg } \theta}{R_2} \left(\frac{\tilde{F}_4 - \tilde{F}_2 + 2\tilde{F}_3}{R_1} + \frac{\tilde{F}_1 + \tilde{F}_3 - 2\tilde{F}_4}{R_2} \right),$$

$$B = \left(\frac{F_1 - F_3}{R_1} - \frac{F_2 + F_4}{R_2} \right)' + \frac{\text{ctg } \theta}{R_2} \left(\frac{2F_1 + F_2 - F_4}{R_1} - \frac{F_1 + 2F_2 + F_3}{R_2} \right). \quad (3.299)$$

Заменяем теперь выражения, заключенные в квадратные скобки и стоящие в правых частях (3.296), на $\tilde{k}L(\varphi_1)$ и $\tilde{k}L(R_2 N_1)$, соответственно; при этом допускается ошибка $O[(h/R)^{3/2}]$ по сравнению с единицей. Отметим, что для цилиндрической и сферической оболочек эта замена будет "точной": ошибка не превышает порядка $O(h^2/R^2)$, ибо в этих случаях из уравнения (3.299) следует, что

$$A = B = 0, \quad (\text{для цилиндра})$$

$$A = \frac{\text{ctg } \theta}{R} \tilde{k}, \quad B = \frac{\text{ctg } \theta}{R} k \quad (\text{для сферы}).$$

Исключая указанные выражения из правых частей уравнений (3.285), приходим к системе

$$\begin{aligned} L(R_2 N_1) + \left[\frac{\nu}{R_1 R_2} - \frac{2(1+\nu)}{\Gamma_0 R_2^2} + \frac{\tilde{k}}{R_2} \right] R_2 N_1 &= -\frac{Eh}{R_2} \varphi_1, \\ L(\varphi_1) + \left[-\frac{\nu}{R_1 R_2} + \frac{k}{R_2} \right] \varphi_1 &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3 R_2} R_2 N_1. \end{aligned} \quad (3.300)$$

Умножая первое из этих уравнений на неопределенный множитель α и складывая его со вторым, приходим к одному уравнению относительно переменной $\varphi_1 + \alpha R_2 N_1$, если α является корнем некоторого квадратного уравнения. Корни последнего с ошибкой $O(h^2/R^2)$ определяются по формуле

$$\frac{Eh}{R_2} \alpha = \frac{\nu}{R_1 R_2} - \frac{1+\nu}{\Gamma_0 R_2^2} + \frac{\tilde{k}-k}{2R_2} \mp \frac{i}{R_2 h} \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad (3.301)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Введя обозначение

$$\lambda^2 = -\frac{k+\tilde{k}}{2R_2} + \frac{1+\nu}{\Gamma_0 R_2^2} \pm \frac{i}{R_2 h} \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad (3.302)$$

приходим к искомому уравнению

$$L(X) - \lambda^2 X = 0, \quad X \equiv \varphi_1 + \alpha R_2 N_1, \quad (3.303)$$

где α определено формулой (3.291).

Различные варианты теории оболочек отличаются друг от друга величиной λ^2 . Сравнению некоторых наиболее употребительных вариантов теории оболочек будет посвящен следующий раздел, а сейчас мы обратимся к сравнению с данными трехмерной теории. Принимая для модулей $B_i = \tilde{B}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) значения (3.274), приходим к следующим выражениям для λ^2 :

$$\begin{aligned} \text{а) } \Gamma_0 &= \frac{5}{6-\nu}, \quad k = \tilde{k} = \frac{\nu(1+\nu)}{R_2}, \\ \lambda^2 &= \frac{6(1-\nu^2)}{5R_2^2} \pm \frac{i}{R_2 h} \sqrt{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (3.304)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \Gamma_0 &= \frac{\pi^2}{12}, \quad k = \tilde{k} = \frac{\nu(1+\nu)}{R_2}, \\ \lambda^2 &= \frac{6(1-\nu^2)}{5R_2^2} \beta \pm \frac{i}{R_2 h} \sqrt{12(1-\nu^2)} \quad \left(\beta \equiv \frac{5(12-\pi^2\nu)}{\pi^2 6(1-\nu)} \right). \end{aligned} \quad (3.305)$$

Для сравнения полученных результатов с данными трехмерной теории воспользуемся известными решениями для полых сферы (А.И. Лурье [130]) и цилиндра (Н.А. Базаренко, И.И. Ворович [18]).

Для сферы касательное напряжение $\tau_{\theta r}$ и меридиональное перемещение u_θ определяются формулами

$$\tau_{\theta r} = f(r) \frac{dT}{d\theta}, \quad u_\theta = f_2(r) \frac{dT}{d\theta}, \quad R - \frac{h}{2} \leq r \leq R + \frac{h}{2}, \quad (3.306)$$

где T является решением уравнения Лежандра

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dT}{d\theta} + n(n+1)T = 0, \quad (3.307)$$

а параметр n находится из характеристического трансцендентного уравнения. С погрешностью $O(h^2/R^2)$ он определяется в случае простого краевого эффекта формулой [130]

$$n(n+1) = 1 - \frac{6(1-\nu^2)}{5} \mp \frac{iR}{h} \sqrt{12(1-\nu^2)}. \quad (3.308)$$

Вычисляя по уравнениям (3.33) и (3.23) интегральные характеристики от функций (3.306), получаем перерезывающую силу N_1 и угол поворота φ_1 :

$$N_1 = C_1 \frac{dT}{d\theta}, \quad \varphi_1 = C_2 \frac{dT}{d\theta},$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Тогда введенная по уравнению (3.303) функция X вычисляется по формуле

$$X = \varphi_1 + \alpha RN_1 = \text{const} \cdot \frac{dT}{d\theta}.$$

Учитывая (3.307), для нее получаем уравнение

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} + \text{ctg} \frac{dX}{d\theta} - \text{ctg}^2\theta X - [1 - n(n+1)] X = 0$$

или, вспоминая обозначение (3.297) и формулу (3.308),

$$LX - \left[\frac{6(1-\nu^2)}{5R^2} \pm \frac{i}{Rh} \sqrt{12(1-\nu^2)} \right] X = 0. \quad (3.309)$$

Последнее уравнение совпадает с (3.303), если λ^2 определено формулой (3.304), т. е. для Γ_0 принято выражение $\Gamma_0 = 5/(6-\nu)$.

В случае полого цилиндра функция, описывающая изменение перемещений и напряжений вдоль меридиана, является решением уравнения [18]

$$m'' - \mu^2 m = 0.$$

Корни характеристического уравнения, соответствующие простому крайевому эффекту, равны [18]

$$\mu = \left(R - \frac{h}{2} \right) \frac{\gamma_0 + \varepsilon \gamma_1 + O(\varepsilon^2)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{2h}{R-h},$$

$$\gamma_0^2 = \pm i \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad \gamma_1 = \frac{3(1-\nu^2)}{5\gamma_0} - \frac{1}{4}\gamma_0,$$

откуда с ошибкой $O(h^2/R^2)$ находится

$$\mu^2 = \frac{6(1-\nu^2)}{5R^2} \pm \frac{i}{Rh} \sqrt{12(1-\nu^2)}.$$

Проводя те же рассуждения, что и для сферической оболочки, получаем следующее уравнение для переменной X :

$$L(X) - \left[\frac{6(1-\nu^2)}{5R^2} \pm \frac{i}{Rh} \sqrt{12(1-\nu^2)} \right] X = 0, \quad L(X) \equiv X'',$$

которое вновь совпадает с уравнениями (3.303)–(3.304).

Скоростью затухания простого краевого эффекта в оболочке вращения называется величина $\sigma = |\operatorname{Re}\lambda|$, где λ^2 определено формулой (3.302). Как отмечается в работе [18], выражение для σ может служить проверкой точности рассматриваемого варианта теории оболочек. Предложенный в данной работе вариант теории оболочек дает согласие в σ с ошибкой $O(h^2/R^2)$, если для Γ_0 принять выражение

$$\Gamma_0 = \frac{5}{6 - \nu}.$$

Напомним, что это же значение для Γ_0 было получено в разд. 3.19. Однако в указанном случае Γ_0 влияло на поправки в низшем изгибном спектре порядка $O(h^2)$, а здесь оно влияет на поправки $O(h/R)$. Вполне допустимо использовать и значение $\Gamma_0 = \pi^2/12$, поскольку коэффициент β при поправочном слагаемом в формуле (3.305) мало отличается от единицы. Например, при $\nu = 0$ коэффициент β равен 1,014, а при $\nu = 0,3$ $\beta = 1,1$. В другом случае ошибка в β гораздо больше, что объясняется влиянием сжимаемости оболочки в поперечном направлении, которая отсутствует при $\nu = 0$.

Подробнее об этом пойдет речь в следующем разделе.

3.23. Действие сосредоточенной силы

Этот раздел содержит результаты [99].

Воздействие сосредоточенных нагрузок на тонкие тела типа пластин или оболочек часто встречается в инженерной практике. Принято считать, что в непосредственной близости от точки приложения сосредоточенной нагрузки теория оболочек должна приводить к ошибкам, ибо в указанной окрестности напряженное состояние существенно трехмерно [13]. Сказанное выглядит особенно естественно в асимптотической версии теории оболочек, поскольку сосредоточенной нагрузке соответствует бесконечно большая изменчивость напряженного состояния. В предлагаемой здесь версии теории оболочек никаких предположений о характере изменчивости внешних нагрузок не принималось. Следовательно, если эти предположения не вкрались неявным образом, то и в этом случае теория простых оболочек должна привести к разумным результатам, согласующимся с данными трехмерной теории, поэтому рассмотрение задачи о сосредоточенном воздействии может служить одной из проверок качества предложенной теории. Выше было показано, что теория простых оболочек внешне мало отличается от традиционных вариантов. И, следовательно, вопрос сводится к тому, что и как сравнивать. Иными словами, главное отличие теории простых оболочек от известных вариантов состоит в интерпретации получаемых результатов. Сами результаты будут отличаться только мелкими деталями качественного характера. Используем задачу Б.Г.Галеркина как тест.

Трехмерная постановка. Задача Б.Г.Галеркина.

Рассмотрим линейно-упругое тело, занимающее объем

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h \leq z \leq h.$$

Толщина для простоты записи обозначена через $2h$.

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} x = 0, \quad a : \sigma_x = 0, \quad v = w = 0; \\ y = 0, \quad b : \sigma_y = 0, \quad u = w = 0; \\ z = h : \sigma_z = p(x, y), \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0; \end{aligned}$$

$$z = -h : \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (3.310)$$

Объемные силы отсутствуют. Поверхностная нагрузка $p(x, y)$ может быть любой. Сосредоточенной силе, приложенной в точке с координатами $a/2, b/2, h$, соответствует $p(x, y)$ вида

$$p(x, y) = -\frac{1}{ab} P \delta \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \delta \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right), \quad (3.311)$$

где P — величина приложенной силы.

Решение задачи (3.310) было получено Б.Г. Галеркиным. Оно имеет вид

$$2Gu = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad 2Gv = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \quad 2Gw = \left[2(1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi; \quad (3.312)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi, \quad \tau = -\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y \partial z};$$

$$\sigma_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi,$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi. \quad (3.313)$$

В этих формулах приняты обозначения:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

бигармоническая функция $\varphi(x, y, z)$ имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [(A_{mn} + zC_{mn}) \operatorname{ch} \alpha z + (B_{mn} + zD_{mn}) \operatorname{sh} \alpha z] \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad (3.314)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \alpha^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2; \quad (3.315)$$

$$D_{mn} = \frac{\operatorname{ch} \alpha h \cdot p_{mn}}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha h - 2\alpha h)}; \quad A_{mn} = -\frac{(\alpha h \operatorname{sh} \alpha h + 2\nu \operatorname{ch} \alpha h) p_{mn}}{\alpha^3 (\operatorname{sh} 2\alpha h + 2\alpha h)};$$

$$C_{mn} = \frac{\operatorname{sh} \alpha h p_{mn}}{\alpha^2 (\operatorname{sh} 2\alpha h + 2\alpha h)}; \quad B_{mn} = -\frac{(\alpha h \operatorname{ch} \alpha h + 2\nu \operatorname{sh} \alpha h) p_{mn}}{\alpha^3 (\operatorname{sh} 2\alpha h + 2\alpha h)}; \quad (3.316)$$

$$p(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y. \quad (3.317)$$

Формулами (3.312)–(3.317) дается полное решение задачи (3.310) в трехмерной постановке. В дальнейшем для краткости ограничимся сравнением только нормального прогиба. Более детальное сравнение можно найти в работе [99].

Подставляя (3.314) в последнюю формулу из (3.312), приходим к равенству

$$2Gw = \sum_{n,m=1}^{\infty} \{ [2(1 - 2\nu)\alpha D - \alpha^2 A] \operatorname{ch} \alpha z - \alpha^2 D z \operatorname{sh} \alpha z +$$

$$+ [2(1 - 2\nu)\alpha C - \alpha^2 B] \operatorname{sh} \alpha z - \alpha^2 C z \operatorname{ch} \alpha z \} \sin \lambda_n x \sin \mu_m y. \quad (3.318)$$

Чтобы сравнить это выражение с данными теории пластин, вычислим его осредненное по толщине значение, а также найдем прогиб срединной плоскости.

Обозначим

$$\bar{w} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h w dz, \quad w_0 = w|_{z=0}.$$

Тогда из уравнения (3.318) вытекают представления

$$2G\bar{w} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\frac{3-2\nu}{2\alpha^2} + \frac{2(1-2\nu)h}{\alpha(\text{sh}2\alpha h - 2\alpha h)} \right] p_{mn} \sin \lambda_n x \sin \mu_m y, \quad (3.319)$$

$$2Gw_0 = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{2(1-2\nu)ch\alpha h + \alpha h \text{sh}\alpha h}{\alpha(\text{sh}2\alpha h - 2\alpha h)} \cdot p_{mn} \sin \lambda_n x \sin \mu_m y. \quad (3.320)$$

Рассмотрим прогиб мембраны $\varphi_p(x, y)$, являющийся решением задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial y^2} = -p(x, y), \quad \varphi_p|_C = 0 \quad (3.321)$$

в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Тогда, сравнивая уравнения (3.319) и (3.320), видим, что в первом присутствует функция φ_p

$$\varphi_p(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\alpha^2} \sin \lambda_n x \sin \mu_m y, \quad (3.322)$$

а во втором нет. Если $p(x, y)$ имеет вид сосредоточенной силы (3.311), то φ_p имеет логарифмическую особенность. В то же время смещение срединной плоскости (3.320) при конечном h никакой особенности не содержит. Физический смысл наличия логарифмической особенности у функции \bar{w} совершенно ясен. Действительно, из решения Б.Г. Галеркина видно, что нормальный прогиб при действии сосредоточенной силы имеет особенности на поверхности $z = h$. Именно эта бесконечно тонкая поверхность и “отслаивается” в виде мембраны, а мембранное решение входит как в (3.318), так и в (3.319). В то же время прогиб срединной поверхности (3.320) никаких особенностей не содержит. Рассмотрим теперь асимптотику функций (3.319) и (3.320). Тогда понятно, что при $h \rightarrow 0$ тонкий параллелепипед сам вырождается в мембрану, но не только в нее. Вычисляя асимптотику (3.319) и (3.320), приходим к выражениям

$$\bar{w} = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh} \left(\frac{3-2\nu}{2} - \frac{3(1-\nu)}{10} \right) \varphi_p(x, y) + O(h), \quad (3.323)$$

$$w_0 = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh} \frac{3(8-3\nu)}{2} \varphi_p(x, y) + O(h), \quad (3.324)$$

где φ_0 — прогиб тонкой шарнирно-опертой пластины

$$\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \quad (3.325)$$

Из последнего уравнения видим, что $\varphi_0(x, y)$ имеет порядок $O(h^{-3})$. В то же время вторые слагаемые в (3.323) и (3.324) имеют порядок $O(h^{-1})$. Если функция $\varphi_p(x, y)$ ограничена, то вторые и третьи слагаемые в (3.323) и (3.324) следует отбросить и в этом приближении функции \bar{w} и w_0 совпадают. Так будет обстоять дело, если функция $p(x, y)$

гладкая. Если же $p(x, y)$ имеет вид (3.311), то функция $\varphi_p(x, y)$ имеет логарифмическую особенность в точке $x = a/2, y = b/2$. Третьи слагаемые в (3.323) и (3.324), имеющие порядок $O(h)$, также имеют особенности в точке $(a/2, b/2)$, но уже типа дельта-функций, т. е. их влияние сказывается только в самой точке приложения силы, и пренебрежимо мало при любом сколь угодно малом отступлении от этой точки. Поэтому указанные слагаемые допустимо игнорировать всегда. Если $p(x, y)$ имеет вид (3.311), то решение задачи (3.322) можно представить в виде

$$\varphi_p(x, y) = -\frac{P}{2\pi} \left[\ln \sqrt{\frac{4ab}{(2x-a)^2 + (2y-b)^2}} + \varphi_q(x, y) \right], \quad (3.326)$$

где $\varphi_q(x, y)$ — гармоническая в прямоугольнике $\{0 < x < a, 0 < y < b\}$ функция и такая, что $\varphi_p(x, y)$ на границе прямоугольника превращается в нуль. Поскольку гармоническая функция, ограниченная на границе, ограничена и внутри области, то при малых h в формулах (3.323)–(3.324) допустимо оставить только логарифмы. Тогда получаем представления

$$\bar{w} = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh} \frac{12-7\nu}{10} \left[-\frac{P}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{4ab}{(2x-a)^2 + (2y-b)^2}} \right], \quad (3.327)$$

$$w_0 = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh} \frac{24-9\nu}{20} \left[-\frac{P}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{4ab}{(2x-a)^2 + (2y-b)^2}} \right]. \quad (3.328)$$

Ясно, что при малых h вторые слагаемые существенны только вблизи точки приложения силы P .

Рассмотрим теперь эту же задачу по теории простых оболочек (пластин). Поскольку решение для шарнирно-опертой прямоугольной пластины строится общеизвестными методами, приведем только окончательное решение, полученное точно и без каких-либо отбрасываний. Ограничимся выражением для нормального прогиба w

$$w = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh} \left(\frac{1}{\Gamma_0} - \frac{\nu}{2} \right) \varphi_p(x, y), \quad (3.329)$$

где $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_p(x, y)$ имеют тот же смысл, что и в формулах (3.323)–(3.324). Первое слагаемое в формуле (3.329) есть решение по теории Кирхгофа. Второе слагаемое обусловлено учетом деформации поперечного сдвига, а третье обусловлено учетом деформации поперечного сжатия. Как и было указано выше, если $p(x, y)$ ограничена и гладкая, то и $\varphi_p(x, y)$ ограничена и гладкая, поэтому при малых h второе и третье слагаемые в уравнении (3.329) в этом случае можно отбросить. Однако заметим, что при $\Gamma_0 = 5/(6-\nu)$ выражение (3.329) совпадает с (3.323) с ошибкой $O(h^4)$ по сравнению с единицей. Поэтому для толстых плит разумно оставлять полное выражение (3.329) даже для гладких нагрузок. В случае сосредоточенных воздействий на тонкую плиту вместо (3.329) нужно записать

$$w = \varphi_0(x, y) + \frac{1}{2Gh} \left(\frac{1}{\Gamma_0} - \frac{\nu}{2} \right) \left[-\frac{P}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{4ab}{(2x-a)^2 + (2y-b)^2}} \right]. \quad (3.330)$$

Сравнивая это выражение с (3.327) и (3.328), приходим к следующим выводам:

1. Теория Кирхгофа приводит к качественному отличию от следствий трехмерной теории, поскольку в ней прогиб ограничен, а согласно уравнению (3.328) он имеет логарифмическую особенность.

2. Прогиб по теории А.Л. Гольденвейзера ([60]) получается из уравнений (3.329) или (3.330) при $\Gamma_0 = \infty$, т. е. в этой теории учитывается поперечное сжатие из-за эффекта Пуассона. Эта теория дает ту же особенность, что и (3.328), но коэффициент в данном случае сильно отличается от (3.328): $(-\nu/2)$ вместо $(24 - 9\nu)/20$.

3. Теория типа Э.Рейсснера, учитывающая деформацию поперечного сдвига ($\Gamma_0 = 5/6$) и не учитывающая деформацию поперечного сжатия, получается из уравнений (3.329) или (3.330) отбрасыванием подчеркнутого слагаемого. В этом случае характер особенности совпадает и с (3.327), и с (3.328). При $\nu = 0$ последние выражения совпадают между собой и с прогибом по Э. Рейсснеру. Если $\nu \neq 0$, то прогиб по Э. Рейсснеру ближе к (3.328), чем к (3.327), но не совпадает ни с одним из этих выражений.

4. Выражения (3.329) или (3.330) совпадают соответственно с (3.323) или (3.327) при значении коэффициента поперечного сдвига $\Gamma_0 = 5/(6 - \nu)$, к которому мы уже приходили выше при рассмотрении простого краевого эффекта в оболочке вращения и спектра изгибных колебаний параллелепипеда.

Основной вывод: предложенный вариант теории простых оболочек вполне согласуется с данными трехмерной теории даже в случае действия сосредоточенных нагрузок.

Замечание: Выше было проведено сравнение только для нормального прогиба. В работе [99] проводятся более детальные сравнения, включающие усилия, моменты и тангенциальные смещения. И для этих величин теория простых оболочек приводит к результатам, согласованным с данными трехмерной теории. Однако отличие последних от других вариантов теории пластин оказывается несколько более существенным, чем для нормального прогиба.

3.24. Сравнение с некоторыми вариантами теории оболочек

Рассмотренная выше теория простых оболочек предназначена для моделирования механического поведения конструкций типа оболочек. Следовательно, до некоторой степени ее можно считать конкурирующей с известными вариантами теории оболочек. Поэтому представляет интерес их сравнение. Ясно, что теория простых оболочек будет конкурентноспособна только в том случае, если она не вступает в неустранимое противоречие с известными вариантами теории оболочек, а последние могут быть получены из нее при тех или иных дополнительных допущениях.

Основная цель теории оболочек — исследование напряженно-деформированных состояний в тонких телах. Внешние нагрузки будем считать не зависящими от толщины оболочек и говорить, что они имеют порядок $O(1)$. Классическая теория способна описывать напряженные состояния, характеризующиеся следующим основным свойством: плоская часть тензора напряжений имеет вид

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h} \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{h^2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}, \quad (3.331)$$

где $\mathbf{T} = O(1)$ или $\mathbf{M} = O(1)$. Иными словами, основные напряжения имеют порядок $O(h^{-1})$ или $O(h^{-2})$. Ошибка, допускаемая классической теорией оболочек, имеет порядок не меньший, чем $O(h)$, по сравнению с единицей. За единицу длины принят некоторый характерный размер, поэтому классическую теорию оболочек принято называть теорией первого приближения. Однако смысл этого термина различается у отдельных вариантов

теории оболочек, а именно одни варианты предназначены для определения главного члена в асимптотическом представлении тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$, в других вариантах присутствует стремление правильно определять главные члены в асимптотических представлениях для тензоров и моментов. Видимо, не существует причин для безусловного предпочтения одной точки зрения другой.

Второй подход одновременно решает проблему первого, и потому является более общим, но это достигается ценой усложнения основных соотношений теории оболочек. В данной работе использован второй подход, поскольку непосредственно тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ в теории оболочек может и не присутствовать. Первая точка зрения реализована в чистом виде только в классической теории А. Лява (1888 г.). Промежуточное положение занимает теория А.И. Лурье (1940 г.). В этой теории, в отличие от варианта А. Лява, выполнено шестое уравнение равновесия, но, как показано в работе В.В. Новожилова и Р.М. Финкельштейна (1943 г.), тензор моментов может иметь ошибку в главных членах. Теория первого приближения, близкая по своей простоте к варианту А. Лява, была предложена независимо друг от друга Л.И. Балбухом и В.В. Новожиловым в 1944 г. Дополнительно к варианту А. Лява в этой теории выполнено шестое уравнение равновесия, что упрощает, например, формулировки вариационных принципов, но не оказывает влияния на определение главного члена в тензоре напряжений. Формальным недостатком варианта Л.И. Балабуха и В.В. Новожилова является невозможность его тензорной записи без нарушения шестого уравнения равновесия. Этот недостаток был устранен в работах У. Койтера и Дж. Сандерса в 1959 г. Позднее вариант Койтера—Сандерса был получен другим путем Э. Рейсснером (1970 г.). Второй подход наиболее полно реализован в теории А.Л. Гольденвейзера, предложенной в 1973 г. для описания напряженных состояний с нормальной асимптотикой. Существует много других вариантов теории оболочек, которые мы не в состоянии рассмотреть (объем данного пособия не позволяет это сделать). Поэтому ниже мы ограничимся только перечисленными вариантами.

Теория А.Лява получается из теории простых оболочек при следующих допущениях:

$$\mathbf{T}_0 = 0, \quad \mathbf{M}_0 = 0, \quad \mathbf{N}_0 = 0, \quad (3.332)$$

$$\mathbf{C}_2 = 0, \quad \|\boldsymbol{\Gamma}\| = \sqrt{2}Gh\boldsymbol{\Gamma}_0 = \infty. \quad (3.333)$$

Кроме того, тензор изгиба-кручения \mathbf{k} следует заменить на тензор $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}$:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T) \simeq \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.334)$$

Аналогично упрощается тензор

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \simeq \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.335)$$

В результате из уравнений (3.183) и (3.180) получаем соотношения упругости А. Лява

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \boldsymbol{\kappa}. \quad (3.336)$$

Если $\|\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}\| = O(1)$ или $\|\mathbf{M}\| = O(1)$, то проделанные выше упрощения сводятся к игнорированию в асимптотике тензора напряжений слагаемых $O(h)$ по сравнению с единицей. В этом смысле теория А. Лява является асимптотически точной и для действительно тонких оболочек безусловна применима.

Рассмотрим вопрос о выполнении шестого уравнения равновесия:

$$\mathbf{T}^T \cdot \cdot \mathbf{c} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (3.337)$$

Если $\|\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}\| = O(1)$, то при $\mathbf{b} \neq 0$ тензор моментов имеет порядок $\|\mathbf{M}\| = O(h^m)$, где $m \geq 1$, поэтому уравнение (3.316) с указанной выше точностью сводится к

$$\mathbf{T}^T \cdot \cdot \mathbf{c} = 0, \quad (3.338)$$

но это уравнение выполнено в теории А. Лява.

Случаи, когда $\|\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}\| = O(h)$, $\mathbf{b} \neq 0$, представляют собой большую сложность. Тогда нарушение шестого уравнения может оказаться недопустимым. Короче говоря, достаточное условие применимости теории А. Лява — соотношение

$$\|\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}\| = O(1), \quad (3.339)$$

но оно не является необходимым.

Теория А.И. Лурье (1940 г.) складывается из предложенной выше при принятии условия (3.311) и следующих значений модулей \mathbf{V}_i и Γ_0 :

$$V_1 = V_2 = 0, \quad V_3 = -V_5 = \frac{1}{2}, \quad V_4 = -\frac{1-\nu}{4}, \quad \Gamma_0 = \infty. \quad (3.340)$$

Теория А.И. Лурье содержится в теории простых оболочек, поскольку она тензорно инварианта и обращает в тождество (3.337), поэтому в ней $\tilde{V}_i = V_i$.

Теория Балабуха–Новожилова (1944 г.) непосредственно не вытекает из теории простых оболочек, поскольку она не допускает тензорной записи при выполнении (3.337). Однако она и не противоречит варианту, предложенному в данной работе, если ограничиться соотношениями в линиях главной кривизны. В этой теории принимаются условия (3.332)–(3.333). Тогда соотношения (3.187) и (3.190) принимают вид

$$T_{12} - \frac{M_{21}}{2R_2} + \frac{M_{12}}{2R_1} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega, \quad (3.341)$$

$$M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\tau + H \frac{\omega}{2} \right). \quad (3.342)$$

Первое из этих соотношений переписывается в виде

$$T_{12} - \frac{M_{21}}{2R_2} + \frac{M_{21}}{2R_2} + \frac{M_{12}}{2R_1} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega.$$

Оно переходит в соответствующее соотношение Балабуха–Новожилова при отбрасывании подчеркнутого слагаемого, имеющего порядок $O(h)$ по сравнению с первым, если выполнено условие (3.339). Соотношение (3.342) можно записать в виде

$$\tilde{H} \equiv \frac{1}{2}(M_{12} + M_{21}) = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\tau + H \frac{\omega}{2} \right),$$

оно также переходит в соответствующее соотношение Балабуха–Новожилова при отбрасывании подчеркнутого члена. Однако в этом случае допускается ошибка $O(1)$ в определении тензора моментов. Тем не менее ошибка в τ имеет порядок $O(h)$, если справедливо выражение (3.339).

Теория Койтера–Сандерса получается при принятии условий (3.332), (3.333). Других ограничений не требуется. В частности, (3.341), (3.342) в точности совпадают с соответствующими соотношениями Койтера–Сандерса.

Теория А.Л. Гольденвейзера предложена в 1973 г. и описывается следующими значениями модулей:

$$L_1 = \frac{\nu}{2(1-\nu)}, \quad L_2 = \frac{\nu}{12(1-\nu)}, \quad L_3 = 0, \quad \Gamma_0 = \infty, \quad (3.343)$$

$$\tilde{B}_i = 0, \quad B_1 = -\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{1+\nu}{2}, \quad B_4 = -\frac{1-\nu}{4}, \quad B_5 = -\frac{1}{2}. \quad (3.344)$$

Кроме того, формулу (3.179) в этой теории следует заменить на

$$T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega. \quad (3.345)$$

Таким образом, теория А.Л. Гольденвейзера, предложенная им для напряженных состояний с нормальной асимптотикой, тензорно не инвариантна и нарушает шестое уравнение равновесия в малых членах. Это объясняется тем, что эти два свойства теории требуют для своего выполнения удержание членов, выходящих за пределы точности данного варианта теории оболочек. Будучи более громоздкой, чем теория, например, Койтера—Сандерса, она позволяет правильно определить главные члены в тензоре моментов. Например, в задаче о чистом кручении полого цилиндра теория Койтера—Сандерса дает $M_{12} = M_{21}$, теория А.Л. Гольденвейзера и А.И. Лурье приводит к равенству $M_{12} = 2M_{21}$ подтверждаемому данными трехмерной теории упругости. Теория простых оболочек при $\Gamma_0 = \infty$, по существу, совпадает с теорией А.Л. Гольденвейзера, отличаясь от нее малыми членами, необходимыми для тензорной инвариантности и выполнения шестого уравнения равновесия. Для напряженных состояний с особой асимптотикой упомянутые малые члены могут стать главными членами, и их уже нужно удерживать.

Интересно сравнить соотношения А.И. Лурье и А.Л. Гольденвейзера. При отсутствии поверхностных нагрузок они отличаются только значениями модулей B_1 и B_3 , причем они совпадают в обоих вариантах при $\nu = 0$. Это объясняется тем, что в варианте А.Л. Гольденвейзера учитывается поперечная сжимаемость оболочки в слагаемых, влияющих на главные члены в тензоре моментов. Это обстоятельство проявляется при анализе скорости затухания простого краевого эффекта в оболочке вращения. При осесимметричной деформации теории А. Лява, Балабуха—Новожилова и Койтера—Сандерса полностью совпадают. Теория А.И. Лурье внешне отличается от них довольно значительно. Тем не менее, согласно (3.302) величина λ^2 , через которую определяется $\sigma = |\operatorname{Re}\lambda|$, для всех этих вариантов дается одной и той же формулой

$$\lambda^2 = \pm \frac{i}{R_2 h} \sqrt{12(1+\nu^2)} + O\left(\frac{h}{R}\right). \quad (3.346)$$

Теория А.Л. Гольденвейзера внешне мало чем отличается от теории А.И. Лурье, но приводит к другой формуле для

$$\lambda^2 = -\frac{\nu(1+\nu)}{2R_2^2} \pm \frac{i}{R_2 h} \sqrt{12(1+\nu^2)} + O\left(\frac{h}{R}\right). \quad (3.347)$$

Теория простых оболочек дает формулу

$$\lambda^2 = -\frac{\nu(1+\nu)}{R_2^2} + \frac{1+\nu}{\Gamma_0 R_2^2} \pm \frac{i}{R_2 h} \sqrt{12(1+\nu^2)} + O\left(\frac{h}{R}\right). \quad (3.348)$$

Сравнивая между собой формулы (3.346) и (3.347), приходим к заключению, что на σ в первую очередь влияет учет поперечной сжимаемости оболочки. Из сравнения формул (3.347) и (3.348) видим, что, во-первых, на σ влияет учет поперечной сжимаемости не только в тензоре моментов, но и в тензоре усилий, а, во-вторых, еще больше влияние на σ оказывает учет деформации поперечного сдвига.

Для действительно тонких оболочек формулы (3.303)–(3.305) совпадают между собой, если коэффициент поперечного сдвига не очень мал. Последнее обстоятельство возможно, например, в трехслойных оболочках, где $0 < \Gamma_0 \ll 1$.

Из проведенного сравнения вытекают следующие значения:

1. Теория простых оболочек не противоречит ни одному из привлеченных к сравнению вариантов теории оболочек.

2. В том случае, когда рассматриваемый вариант теории оболочек допускает тензорную запись и обращает в тождество шестое уравнение равновесия, такой вариант может быть получен из теории простых оболочек при частных значениях их упругих модулей. Таковы теории А.И. Лурье и Койтера—Сандерса. Подчеркнем однако, что при построении теории простых оболочек кинематические теории не привлекались. Это означает, что область применимости классической теории оболочек может быть шире, чем область применимости кинематических гипотез. Иными словами, не следует отождествлять точность теории оболочек с точностью кинематических гипотез.

3. Для действительно тонких оболочек все варианты теории оболочек, по существу, совпадают, поэтому для них теория простых оболочек не имеет преимуществ перед классическими вариантами, кроме формальной строгости, если последнее можно считать преимуществом. Поэтому, если иметь в виду однородные по толщине оболочки, то теория простых оболочек может быть рекомендована только для исследования напряженных состояний в толстых оболочках:

$$0,05 < h/R \leq 0,5 \div 0,6.$$

3.25. Теоремы взаимности, Клапейрона и единственности

Одной из важнейших теорем линейной теории упругости, на которой основаны многие практические способы решения краевых задач, является теорема взаимности Бетти. Эта теорема остается справедливой и в теории простых оболочек, что будет доказано. Причем, для справедливости этой теоремы конкретные значения модулей не играют никакой роли.

Рассмотрим две системы нагрузок, действующих на оболочку:

$$\overset{\alpha}{\mathbf{F}}, \quad \overset{\alpha}{\mathbf{L}}, \quad \overset{\alpha}{\mathbf{t}}, \quad \overset{\alpha}{\mathbf{m}} \quad (\alpha = 1, 2), \quad (3.349)$$

где \mathbf{F} — поверхностная сила; \mathbf{L} — поверхностный момент; \mathbf{t} — контурная сила; \mathbf{m} — контурный момент. Векторы $\overset{\alpha}{\mathbf{F}}$ и $\overset{\alpha}{\mathbf{L}}$ вычисляются через векторы напряжений $\overset{\alpha}{\boldsymbol{\tau}}_n^+$ и $\overset{\alpha}{\boldsymbol{\tau}}_n^-$, приложенные к лицевым поверхностям оболочки, по формулам (3.34) и (3.38). Через эти величины вычисляются тензоры собственных напряжений $\overset{\alpha}{\mathbf{T}}_0$ и $\overset{\alpha}{\mathbf{M}}_0$. Нагрузки (3.349) вызывают в оболочке смещения $\overset{\alpha}{\mathbf{u}}$ и повороты $\mathbf{a} \cdot \overset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}}$.

Выпишем уравнения статики

$$\nabla \cdot \overset{\alpha}{\mathbf{T}} + \rho \overset{\alpha}{\mathbf{F}} = 0, \quad \nabla \cdot \overset{\alpha}{\mathbf{M}} + \overset{\alpha}{\mathbf{T}}_{\times} + \rho \overset{\alpha}{\mathbf{L}} = 0. \quad (3.350)$$

Умножим эти уравнения скалярно на \mathbf{u}^β и $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\phi}^\beta$ ($\beta = 1, 2$), соответственно. Получившиеся уравнения проинтегрируем по области, ограниченной контуром C . В результате простых преобразований получим

$$\int_{(\Sigma)} (\nabla \cdot \mathbf{T}^\alpha) \cdot \mathbf{u}^\beta d\sigma = - \int_{(\Sigma)} (\mathbf{T}^{\alpha T} \cdot \nabla \mathbf{u}^\beta) d\sigma + \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\beta dC.$$

Тензор усилий \mathbf{T} представим в виде следующего разложения:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} - \frac{1}{2}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{N} \otimes \mathbf{n}, \quad (3.351)$$

где \mathbf{S} — плоский симметричный тензор; а тензор, стоящий в скобках, кососимметричен; \mathbf{N} — вектор перерезывающих сил. Подставляя (3.351) в предыдущее равенство и производя в нем простые преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} (\nabla \cdot \mathbf{T}^\alpha) \cdot \mathbf{u}^\beta d\sigma = & - \int_{(\Sigma)} \left\{ \mathbf{S}^\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\beta + \mathbf{M}^{\alpha T} \cdot \left[\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^\beta \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^{\beta T} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \mathbf{N}^\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}^\beta \cdot \mathbf{n} \right\} d\sigma + \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\beta dC, \end{aligned} \quad (3.352)$$

где

$$2\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^T, \quad (3.353)$$

$$\int_{(\Sigma)} \mathbf{T}^\alpha \times \cdot \boldsymbol{\phi}^\beta d\sigma = - \int_{(\Sigma)} \mathbf{M}^{\alpha T} \cdot \left\{ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \frac{1}{2} \left[\mathbf{a} \times \boldsymbol{\phi}^\beta - \left(\mathbf{a} \times \boldsymbol{\phi}^\beta \right)^T \right] \right\} d\sigma - \int_{(\Sigma)} \left(\mathbf{N}^\alpha \times \boldsymbol{\phi}^\beta \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

$$\int_{(\Sigma)} (\nabla \cdot \mathbf{M}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\phi}^\beta d\sigma = - \int_{(\Sigma)} \mathbf{M}^{\alpha T} \cdot \left(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} \right) d\sigma + \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}^\alpha \cdot \boldsymbol{\phi}^\beta dC, \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\phi}. \quad (3.354)$$

Складывая равенства (3.352), (3.353) и (3.354), получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} \left[(\nabla \cdot \mathbf{T}^\alpha) \cdot \mathbf{u}^\beta + \mathbf{T}^\alpha \times \cdot \boldsymbol{\phi}^\beta + (\nabla \cdot \mathbf{M}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\phi}^\beta \right] d\sigma = & - \int_{(\Sigma)} \left[\mathbf{S}^\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\beta + \right. \\ & \left. + \mathbf{M}^{\alpha T} \cdot \boldsymbol{\kappa}^\beta + \mathbf{N}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\beta \right] + \int_C \left(\mathbf{t}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\beta + \mathbf{m}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\beta \right) dC, \end{aligned} \quad (3.355)$$

где

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^T), \quad \mathbf{e} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\phi}. \quad (3.356)$$

При получении уравнения (3.355) были использованы краевые условия

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^\alpha|_C = \mathbf{t}^\alpha, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}^\alpha|_C = \mathbf{m}^\alpha. \quad (3.357)$$

Используя (3.355), запишем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_{(\Sigma)} \left[\left(\overset{\alpha}{\mathbf{S}} - \overset{\alpha}{\mathbf{T}}_0 \right) \cdot \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\overset{\alpha}{\mathbf{M}} - \overset{\alpha}{\mathbf{M}}_0 \right)^T \cdot \cdot \overset{\beta}{\mathbf{k}} + \left(\overset{\alpha}{\mathbf{N}} - \overset{\alpha}{\mathbf{N}}_0 \right) \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\gamma}} \right] d\sigma = \\ & = \int_{(\Sigma)} \left[\rho \overset{\alpha}{\mathbf{F}} \cdot \overset{\beta}{\mathbf{u}} - \overset{\alpha}{\mathbf{T}}_0 \cdot \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho \overset{\alpha}{\mathbf{L}} \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\varphi}} - \overset{\alpha}{\mathbf{M}}_0^T \cdot \cdot \overset{\beta}{\mathbf{k}} - \overset{\alpha}{\mathbf{N}}_0 \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\gamma}} \right] d\sigma + \int_C \left(\overset{\alpha}{\mathbf{t}} \cdot \overset{\beta}{\mathbf{u}} + \overset{\alpha}{\mathbf{m}} \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\gamma}} \right) dC. \end{aligned} \quad (3.358)$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, называется работой сил-моментов α -го состояния на перемещениях-поворотах β -состояния. От традиционного Оно отличается только присутствием тензоров собственных напряжений $\mathbf{T}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{N}_0$. Покажем, что левая часть (3.358) симметрична относительно индексов α и β . Для этого вспомним соотношения упругости (3.183)–(3.185). В обозначениях этого раздела они имеют вид:

$$\overset{\alpha}{\mathbf{S}} - \overset{\alpha}{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \overset{\alpha}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \overset{\alpha}{\mathbf{k}}, \quad \left(\overset{\alpha}{\mathbf{M}} - \overset{\alpha}{\mathbf{M}}_0 \right)^T = \overset{\alpha}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \cdot \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \overset{\alpha}{\mathbf{k}}, \quad \overset{\alpha}{\mathbf{N}} - \overset{\alpha}{\mathbf{N}}_0 = \text{Gh}\Gamma_0 \overset{\alpha}{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (3.359)$$

Используя эти соотношения, легко получаем

$$\begin{aligned} & \left(\overset{\alpha}{\mathbf{S}} - \overset{\alpha}{\mathbf{T}}_0 \right) \cdot \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\overset{\alpha}{\mathbf{M}} - \overset{\alpha}{\mathbf{M}}_0 \right)^T \cdot \cdot \overset{\beta}{\mathbf{k}} + \left(\overset{\alpha}{\mathbf{N}} - \overset{\alpha}{\mathbf{N}}_0 \right) \cdot \overset{\beta}{\boldsymbol{\gamma}} = \\ & = \left(\overset{\beta}{\mathbf{S}} - \overset{\beta}{\mathbf{T}}_0 \right) \cdot \cdot \overset{\alpha}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\overset{\beta}{\mathbf{M}} - \overset{\beta}{\mathbf{M}}_0 \right) \cdot \cdot \overset{\alpha}{\mathbf{k}} + \left(\overset{\beta}{\mathbf{N}} - \overset{\beta}{\mathbf{N}}_0 \right) \cdot \overset{\alpha}{\boldsymbol{\gamma}}, \end{aligned} \quad (3.360)$$

т. е. левая часть симметрична относительно перестановки индексов α и β . Значит, и правая часть симметрична относительно указанной перестановки. Тем самым мы доказали **теорему взаимности**, которая формулируется следующим образом: работа сил α -го состояния на перемещениях β -го состояния равна работе сил β -го состояния на перемещение α -го состояния.

Положив в (3.358) $\overset{\alpha}{\mathbf{u}} = \overset{\beta}{\mathbf{u}}$, $\overset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}} = \overset{\beta}{\boldsymbol{\varphi}}$ и опуская индексы α , получаем **теорему Клапейрона**: удвоенная энергия деформации равна работе внешних сил, действующих на оболочку

$$\begin{aligned} 2 \int_{(\Sigma)} W d\sigma & = \int_{(\Sigma)} \left[\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{T}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \rho \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{M}_0^T \cdot \cdot \mathbf{k} - \mathbf{N}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma} \right] d\sigma + \\ & + \int_C \left(\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) dC. \end{aligned} \quad (3.361)$$

Из последней теоремы вытекает теорема единственности. Действительно, пусть внешним нагрузкам соответствуют два решения: $\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1$ и $\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2$. Тогда разность этих решений $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2$ удовлетворяет однородным уравнениям и краевым условиям. Согласно (3.361) получаем, что энергия от разности решений обращается в нуль:

$$\int_{(\Sigma)} W d\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0.$$

С другой стороны, ранее было доказано, что энергия обращается в нуль только на жестких движениях. Таким образом доказали теорему единственности: решение статической задачи теории простых оболочек единственно с точностью до движений жесткого целого.

3.26. Сильная эллиптичность уравнений равновесия

Полная система уравнений линейной теории простых оболочек включает в себя пять уравнений второго порядка относительно компонент векторов \mathbf{u} и $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varphi}$, т. е. это система уравнений в частных производных десятого порядка. Как известно, свойства решений этой системы существенно зависят от ее типа, исследование последнего является целью данного раздела.

Выпишем полную систему уравнений теории оболочек. Она состоит из динамических уравнений

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \rho \frac{2Nh^2}{12} \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} = \frac{\rho h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} + 2N\mathbf{c} \cdot \mathbf{v} \right). \quad (3.362)$$

Причем, для простоты записи считаем, что вектор поворота является плоским, т. е. $\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} = 0$. Как было показано выше, нормальная компонента вектора $\boldsymbol{\varphi}$ не входит ни в одно из уравнений теории оболочек, в которой используется условие $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$, т. е. для однородных оболочек из неполярного материала. Вектор перемещения \mathbf{u} представим в виде разложения на плоскую часть и нормальную к касательной плоскости

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + w \mathbf{n}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.363)$$

Соотношения упругости имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{M}) &= \mathbf{C}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_2 \cdot \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{T}_0, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{N} &= \mathbf{N}_0 + Gh\Gamma_0 \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{M}^\top = \mathbf{M}_0^\top + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (3.364)$$

Геометрические уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\top), \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\top). \end{aligned} \quad (3.365)$$

Подставляя уравнения (3.364) и (3.365) в (3.362), получим систему пяти уравнений относительно векторов \mathbf{v} , $\boldsymbol{\varphi}$ и скаляра w . При исследовании типа этой системы тензоры собственных напряжений \mathbf{T}_0 , \mathbf{N}_0 , \mathbf{M}_0 , а также нагрузки \mathbf{F} и \mathbf{L} не играют никакой роли, поэтому в дальнейшем считаем

$$\mathbf{T}_0 = 0, \quad \mathbf{N}_0 = 0, \quad \mathbf{M}_0 = 0, \quad \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{L} = 0. \quad (3.366)$$

Кроме того, в получившихся уравнениях необходимо оставить только старшие (вторые) производные, а оператор-градиент заменить на вещественный вектор $\boldsymbol{\xi}$. После этого нужно умножить первое уравнение из (3.362) скалярно на \mathbf{u} , а второе скалярно на $\boldsymbol{\varphi}$ и сложить получившиеся уравнения (сначала ограничиваемся статическим случаем). В результате получим следующую квадратичную форму:

$$\Phi = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{T}_\xi \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{M}_\xi \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{T}_\xi \cdot \mathbf{v} + w \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{N}_\xi + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{M}_\xi \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.367)$$

где

$$\mathbf{T}_\xi \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\xi^\top \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\xi + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\xi,$$

$$\mathbf{N}_\xi = \text{Gh}\Gamma_0\boldsymbol{\gamma}_\xi, \quad \mathbf{M}_\xi^\top = \boldsymbol{\varepsilon}_\xi \cdot \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{k}_\xi. \quad (3.368)$$

Тензоры “деформации” $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi$, $\boldsymbol{\gamma}_\xi$, \mathbf{k}_ξ получаются из уравнения (3.365) заменой $\nabla \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ и отбрасыванием слагаемых, не содержащих дифференцирования (или вектора $\boldsymbol{\xi}$):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\xi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{v} + \mathbf{v}\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\gamma}_\xi = \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{w}, \quad \mathbf{k}_\xi = \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}). \quad (3.369)$$

Подставляя уравнение (3.368) и (3.369) в (3.367), приведем форму Φ к виду

$$\begin{aligned} \Phi = & \boldsymbol{\xi}\mathbf{v} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\xi}\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\xi}\mathbf{v} \cdot \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \cdot [\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2}\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{v})] + \\ & [\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2}\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{v})] \cdot \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \cdot [\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2}\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{v})] + \text{Gh}\Gamma_0\xi^2\boldsymbol{w}^2. \end{aligned} \quad (3.370)$$

Определение. Система уравнений (3.362) называется сильно эллиптической, если для любого действительного вектора $\boldsymbol{\xi}$ соответствующая ей форма (3.370) строго больше нуля для любых векторов \mathbf{v} , $\boldsymbol{\varphi}$ и скаляра \boldsymbol{w} , но не обращающихся одновременно в нуль.

Теорема. Уравнения равновесия теории простых оболочек являются сильно эллиптической системой, если тензоры упругости \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 определены формулами (3.120), (3.121) и (3.122) соответственно.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\xi}$, \mathbf{v} , $\boldsymbol{\varphi}$ — произвольные действительные векторы, удовлетворяющие условию

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.371)$$

и пусть выполнено условие

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{w}^2 \neq 0. \quad (3.372)$$

Представим тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi$, $\boldsymbol{\gamma}_\xi$ и \mathbf{k}_ξ в виде разложений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_\xi &= \varepsilon_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \frac{\omega}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + \varepsilon_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{k}_\xi &= -\delta_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \kappa_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \kappa_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \delta_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (3.373)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \xi_1\nu_1, \quad \varepsilon_2 = \xi_2\nu_2, \quad \omega = \xi_1\nu_2 + \nu_2\xi_1, \quad \kappa_1 = \xi_1\varphi_2, \quad \kappa_2 = -\xi_2\varphi_1, \\ \delta_1 &= -\xi_1\varphi_1 - \frac{1}{2R_1}(\xi_1\nu_2 - \xi_2\nu_1), \quad \delta_2 = \xi_2\varphi_2 + \frac{1}{2R_2}(\xi_1\nu_2 - \xi_2\nu_1), \\ \nu_\alpha &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad \varphi_\alpha = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.374)$$

В разложениях (3.373) использованы главные направления на поверхности, однако в силу инвариантности формы (3.370) результат будет верен в любой системе координат. Сравнивая формулу (3.370) с выражением для энергии деформации (3.277), видим, что они совпадают, если в (3.277) в качестве тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и \mathbf{k} выбрать тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}_\xi$, $\boldsymbol{\gamma}_\xi$ и \mathbf{k}_ξ . Поскольку (3.277) неотрицательно, то неотрицательна и форма (3.370). При этом из равенства нулю (3.277) вытекают равенства

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 0, \quad \delta_1 + \delta_2 = 0, \quad \omega - \frac{h^2H_1}{12}(\delta_2 - \delta_1) = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0. \quad (3.375)$$

Подставляя сюда вместо компонент тензоров деформации величины (3.374), получаем следующую систему:

$$\xi_1\nu_1 = 0, \quad \xi_2\nu_2 = 0, \quad \xi_1\varphi_2 = 0, \quad \xi_2\varphi_1 = 0, \quad \xi^2\boldsymbol{w}^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \xi_2 v_1 + v_2 \xi_1 - \frac{h^2 H_1}{12} [\xi_2 \varphi_2 + \xi_1 \varphi_1 - H(\xi_1 v_2 - \xi_2 v_1)] &= 0, \\ \xi_2 \varphi_2 + \xi_1 \varphi_1 + H_1(\xi_1 v_2 - \xi_2 v_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.376)$$

Нетрудно убедиться, что эта система имеет только тривиальное решение для любого вектора ξ , удовлетворяющего условию

$$\xi^2 \equiv \xi \cdot \xi \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0.$$

Таким образом, доказано, что

$$\Phi(\xi, \varphi, \mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0, \quad \xi^2 \neq 0, \quad v^2 + \varphi^2 + w^2 \neq 0. \quad (3.377)$$

Иными словами, доказано, что уравнения равновесия теории оболочек, представленной в этой главе, являются сильно эллиптическими, если выполняются неравенства (3.282)

$$\begin{aligned} -1 < \nu \leq \frac{1}{2}, \quad \eta_1^2 < 1 - \nu^2, \\ 1 - \nu^2 - \nu^2 \eta^2 > \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \eta_1^2 (1 - \nu^2 - \eta_1^2), \end{aligned} \quad (3.378)$$

где η и η_1 определены формулами (3.281).

Обратимся теперь к динамической задаче.

Определение [165]. Система (3.362) называется гиперболической, если задача на собственные значения

$$\begin{aligned} \xi \cdot \mathbf{T}_\xi &= \rho \lambda^2 (\mathbf{v} - \frac{2Hh^2}{12} \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\varphi}), \quad \xi \cdot \mathbf{N}_\xi = \rho \lambda^2 \omega^2, \\ \xi \cdot \mathbf{M}_\xi &= \rho \lambda^2 (\frac{2Hh^2}{12} \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} + \frac{h^2}{12} \boldsymbol{\varphi}) \end{aligned} \quad (3.379)$$

имеет только действительные собственные значения λ .

В рассматриваемом случае гиперболичность обеспечивается сильной эллиптичностью уравнений равновесия. Действительно, умножая первое уравнение системы (3.379) скалярно на \mathbf{v} , второе уравнение на \mathbf{w} , а третье уравнение скалярно на $\boldsymbol{\varphi}$ и складывая, получаем

$$\rho \lambda^2 = 12 \frac{\Phi(\xi, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi})}{12\nu^2 - 4Hh^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varphi} + h^2 \varphi^2 + 12w^2} > 0 \quad (3.380)$$

для любых $\xi, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}$, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon^2 \neq 0, \quad v^2 + w^2 + \frac{h^2}{12} \varphi^2 - \frac{Hh^2}{3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varphi} \neq 0.$$

Заметим, что последнее выражение положительно определено. Неравенство (3.380) обеспечивается неравенством (3.377).

Таким образом, уравнение движения тонких оболочек принадлежит к гиперболическому типу. На самом деле справедливо более сильное утверждение. Если $H \neq 0$, то система (3.362) является строго гиперболической, или, что то же самое, t -гиперболической по И.Г. Петровскому [165]. Если $H = 0$ и $H_1 = 0$, т. е. оболочка является пластиной, то полная задача разбивается на две независимых задачи, каждая из которых является строго гиперболической, хотя суммарная задача таковой не является. Поясним последнее обстоятельство.

Напомним, уравнения называются строго гиперболическими, если все собственные значения задачи (3.379) являются не только действительными, но и различными. Для пластины полная задача разбивается на две: движения в плоскости (продольно-сдвиговые колебания) и движение из плоскости (изгибные колебания и колебания поперечного сдвига). Первая задача описывается вектором $\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$. Вторая описывается вектором $\boldsymbol{\varphi}$ и скаляром $w = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Для первой задачи, согласно первому уравнению из системы (3.379), имеем

$$\left[A_1 \xi_1 \xi_1 \cdot A_2 \xi_2^2 \mathbf{a} - \frac{(1 - \nu^2) \rho \lambda^2}{Eh} \mathbf{a} \right] \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.381)$$

Приравнявая определитель этой системы нулю, находим корни характеристического уравнения. Они имеют вид

$$\rho \lambda_1^2 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} A_2 \xi_2^2, \quad \rho \lambda_2^2 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (A_1 + A_2) \xi_2^2. \quad (3.382)$$

Для второй задачи получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} Gh\Gamma_0 \xi_2^2 w &= \rho \lambda^2 w, \\ \left[C_2 \xi_2^2 + C_1 \xi_1^2 \frac{(1 - \nu^2) \rho \lambda^2}{Eh} \right] \varphi_1 - C_1 \xi_1 \xi_2 \varphi_2 &= 0, \\ -C_1 \xi_1 \xi_2 + \left[C_2 \xi_2^2 + C_1 \xi_1^2 - \frac{(1 - \nu^2) \rho \lambda^2}{Eh} \right] \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.383)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид

$$\rho \lambda_3^2 = Gh\Gamma_0, \quad \rho \lambda_4^2 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} C_2 \xi_2^2, \quad \rho \lambda_5^2 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (C_1 + C_2) \xi_2^2. \quad (3.384)$$

Поскольку $A_1 > 0, A_2 > 0$, то $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$, и первая задача является строго гиперболической. Вторая задача будет строго гиперболической ($C_1 > 0, C_2 > 0$), если

$$Gh\Gamma_0 \neq \frac{Eh}{1 - \nu^2} C_2, \quad Gh\Gamma_0 \neq \frac{Eh}{1 - \nu^2} (C_1 + C_2).$$

Если для C_1 и C_2 принять значения

$$C_1 = A_1 = \frac{1 + \nu}{2}, \quad C_2 = A_2 = \frac{1 - \nu}{2},$$

то последние неравенства сводятся к следующим

$$\Gamma_0 \neq 1, \quad \Gamma_0 \neq \frac{2}{1 - \nu}. \quad (3.385)$$

Таким образом, если $\Gamma_0 = \pi^2/12$ (Миндлин и др.) или $\Gamma_0 = 5/6$ (Рейсснер), то и вторая задача является строго гиперболической. Суммарная задача, тем не менее, не является строго гиперболической, поскольку $\lambda_1^2 = \lambda_4^2, \lambda_2^2 = \lambda_5^2$. Заметим, что часто для коэффициента поперечного сдвига Γ_0 принимается значение $\Gamma_0 = 1$. В этом случае, как видно из (3.384), условия строгой гиперболичности для задачи об изгибных колебаниях нарушаются.

Доказательство строгой гиперболичности для общего случая мы рассматривать не будем, однако заметим, что существенную роль при проверке условий строгой гиперболичности играют подчеркнутые в (3.362) и (3.379) члены, которые часто игнорируются. Наконец, последнее замечание состоит в следующем. Строго гиперболические системы в отличие от гиперболических систем хороши только тем, что для них доказана корректность постановки задачи Коши. Однако отсутствие строгой гиперболичности вовсе не влечет за собой некорректности, поэтому требование строгой гиперболичности не является физически обязательным. В то же время требование гиперболичности является обязательным для хорошей физической теории. В теории оболочек можно доказать, что корректность постановки задачи Коши обусловлена гиперболичностью уравнений движения и сильной эллиптичностью уравнений равновесия.

3.27. Краевые условия и вариационные принципы

До сих пор краевые условия почти не обсуждались, поскольку в теории оболочек типа Тимошенко постановка краевых условий почти тривиальна. В самом деле, если считать, что для трехмерной задачи краевые условия известны, то использование формул (3.22)–(3.23), а также (3.33), (3.37) практически решает проблему краевых условий, поэтому мы просто перечислим наиболее часто встречающиеся типы краевых условий.

Введем следующие обозначения. Пусть \mathbf{P} и \mathbf{P}_1 — ортопроекторы, т. е. операторы, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1^T, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.386)$$

Причем эти операторы могут быть кусочно непрерывными функциями точек контура \mathcal{C} . Подавляющее большинство краевых условий имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s) \cdot [\mathbf{u}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)] &= 0, & [\mathbf{I} - \mathbf{P}(s)] \cdot [\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{t}(s)] &= 0, \\ \mathbf{P}_1(s) \cdot [\boldsymbol{\varphi}(s) - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s)] &= 0, & [\mathbf{a} - \mathbf{P}_1(s)] \cdot [\mathbf{v} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{m}(s)] &= 0, \end{aligned} \quad (3.387)$$

где s — точка контура \mathcal{C} ; \mathbf{n} — вектор нормали к несущей поверхности; \mathbf{v} — нормаль к \mathcal{C} , причем $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$; \mathbf{a} — первый метрический тензор; $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ — заданные на границе векторы смещения и поворота; $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{m}(s)$ — заданные на границе векторы силы и момента.

Всего в уравнениях (3.387) содержится ровно пять краевых условий (не тривиальных). Например, в тех точках контура, где заданы кинематические условия, имеем $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{a}$; тогда первое и третье условие принимают вид

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{C}} = \tilde{\mathbf{u}}(s), \quad \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varphi}|_{\mathcal{C}} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(s) \quad (\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{n} = 0). \quad (3.388)$$

Второе и четвертое условия из (3.387) имеют вид равенств типа $\mathbf{0} = \mathbf{0}$, т. е. не являются никакими условиями. В тех точках контура, где заданы силовые условия, имеем (3.22)

$$\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{0} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}|_{\mathcal{C}} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}|_{\mathcal{C}} = \mathbf{m} \quad (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0). \quad (3.389)$$

Могут быть и смешанные условия, например, для шарнирно-опертой части контура имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{nn} + (\mathbf{n} \times \mathbf{v})(\mathbf{n} \times \mathbf{v}), \quad \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{vv}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{vv}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{P}_1 = (\mathbf{n} \times \mathbf{v})(\mathbf{n} \times \mathbf{v}). \quad (3.390)$$

Конечно, существует много других типов краевых условий.

Совершенно очевидной является формулировка всех известных в линейной теории упругости вариационных принципов применительно к теории оболочек, поэтому приведем только один (но важнейший) вариационный принцип минимума потенциальной энергии системы. Составим функционал

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Sigma} W d\sigma - \int_{\Sigma} [\rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{T}_0 + \nabla \cdot \mathbf{N}_0 - \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{b}] \cdot \mathbf{u} + (\rho \mathbf{L} + \nabla \cdot \mathbf{M}_0 + \\ + \mathbf{N}_0 \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi} d\sigma - \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}). \quad (3.391) \end{aligned}$$

Теорема. Среди векторов \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = 0$, $\mathbf{P}_1 \cdot (\boldsymbol{\varphi} - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) = 0$ решениями статической задачи теории оболочек являются те, которые доставляют строгий минимум функционалу (3.391).

Доказательство этой теоремы основано на положительности функции W и почти дословно повторяет стандартные для теории упругости рассуждения. Мы привели здесь формулировку этого принципа только для того, чтобы продемонстрировать специфику, связанную с отсутствием натурального состояния в теории оболочек.

Глава 4.

Теория двухслойных оболочек

4.1. Основные соотношения теории двухслойных оболочек

Основным объектом для приложения теории простых оболочек являются задачи для конструкций типа оболочек. Ниже мы коротко рассмотрим теорию двухслойных оболочек. Необходимость в этой теории возникла в связи с расчетом на прочность и колебания мощных электромагнитных катушек. (Результаты этого раздела получены совместно с Н.М. Куражевой.) Катушка моделировалась двухслойным цилиндром, внутренний слой которого был конструктивно анизотропным, а наружный — изотропным. Именно этот случай мы и рассмотрим. При постановке этой задачи будем использовать идеи предыдущей главы, но несколько в другой трактовке, которая была предложена в работе [93].

Уравнения статики имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{L} = 0, \quad (4.1)$$

где \mathbf{T}, \mathbf{M} — тензоры усилий и моментов; \mathbf{F}, \mathbf{L} — массовые сила и момент.

Определяющие уравнения зададим в виде

$$\mathbf{T}^\Gamma = \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \mathbf{e} + \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \mathbf{k}, \quad \mathbf{M}^\Gamma = \mathbf{e} \cdot \cdot \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \mathbf{k}, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ — тензоры упругости четвертого ранга.

Тензоры деформаций \mathbf{e}, \mathbf{k} имеют вид

$$\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{k} = \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$ — векторы смещения и поворота; \mathbf{a} — первый метрический тензор.

По сравнению с предыдущей главой в уравнении (4.2) отброшены тензоры собственных напряжений. Кроме того, в (4.2) входят непосредственно тензоры \mathbf{e} и \mathbf{k} , поэтому при произвольных значениях тензоров $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ шестое уравнение равновесия не удовлетворяется. Тензоры $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3$ являются симметричными. Шестое уравнение равновесия требует, чтобы тензоры упругости удовлетворяли следующим соотношениям

$$\mathbf{c} \cdot \cdot \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{c}_2 \cdot \cdot \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (4.4)$$

где \mathbf{b}, \mathbf{c} — второй метрический и дискриминантный тензоры несущей поверхности.

Легко убедиться, что если выполнены уравнения (4.4), то выполнено и шестое уравнение

$$\mathbf{T}^\Gamma \cdot \cdot \mathbf{c} + \mathbf{M}^\Gamma \cdot \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (4.5)$$

Тензоры упругости зависят от многих факторов, в том числе от свойств материала, от внутреннего строения оболочки и от геометрии несущей поверхности. Определение конкретных значений тензоров упругости и составляет основную проблему в теории оболочек.

Значения тензоров упругости не зависят от того, в каком базисе их представлять. Воспользуемся этой возможностью и запишем их в естественном базисе несущей поверхности: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{n}$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — главные направления на несущей поверхности, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$ — нормаль. В качестве несущей поверхности для двухслойных оболочек удобно принять поверхность раздела слоев оболочки. Любой из тензоров $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ может быть записан в виде

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = C_i^{m\alpha n\beta} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_n \mathbf{e}_\beta \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.6)$$

Симметричность тензоров $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3$ влечет за собой соотношения для компонент

$$C_i^{m\alpha n\beta} = C_i^{n\beta m\alpha} (i = 1, 3). \quad (4.7)$$

Поскольку тензор моментов является плоским ($\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$), то тензоры \mathbf{C}_3 и \mathbf{C}_2 должны удовлетворять условиям

$$C_3^{3\alpha n\beta} = C_3^{n\beta 3\alpha} = 0, \quad C_2^{m\alpha 3\beta} = 0. \quad (4.8)$$

Будем считать, что материал оболочки является ортотропным и оси ортотропии совпадают с осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$. Тогда группе тензоров упругости $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ принадлежат ортогональные тензоры

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{n}\mathbf{n} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{n}\mathbf{n} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2. \quad (4.9)$$

Подробно о группах симметрии было сказано в третьей главе, поэтому здесь этот вопрос не обсуждается. В той же третьей главе было доказано, что общий вид тензоров $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, удовлетворяющих соотношениям (4.7)–(4.8) и допускающих тензоры (4.9) своими элементами симметрии, дается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & A_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + A_2 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) + A_3 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + A_4 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + A_5 (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_3) + \\ & A_6 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_4 + A_7 \mathbf{n} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{n} \mathbf{e}_\alpha + A_8 \mathbf{n} (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^\alpha) \mathbf{n} \mathbf{e}_\alpha, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 + B_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 + B_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 + B_4 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + B_5 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_1 + B_6 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 + B_7 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4 + B_8 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_2, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + C_2 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) + C_3 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + C_4 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + C_5 (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_3) + C_6 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_4, \quad (4.12)$$

где тензоры \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3, 4$) образуют базис на касательной плоскости несущей поверхности:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \quad (4.13)$$

Ограничения (4.4) в скалярной форме имеют вид:

$$A_4 = \mathbf{H} B_2 + H_1 B_3, \quad A_5 = \mathbf{H} B_5 + H_1 B_8, \quad B_2 = \mathbf{H} C_1 + H_1 C_2, \quad B_3 = \mathbf{H} C_2 + H_1 C_3, \quad (4.14)$$

где

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad H_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right); \quad (4.15)$$

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны несущей поверхности.

Все скалярные коэффициенты в формулах (4.10)–(4.12) зависят от радиуса кривизны, толщин слоев и модулей упругости материалов слоев.

Повторяя соответствующие рассуждения теории размерностей, приведенные в третьей главе, можно доказать, что на самом деле тензоры упругости зависят от определенных комбинаций перечисленных выше параметров, а именно

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(Eh, hN, hN_1), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(Eh^2, hN, hN_1), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}(Eh^3, hN, hN_1), \quad (4.16)$$

где E — некоторый характерный модуль Юнга (все равно какой); $h = h_1 + h_2$ — суммарная толщина оболочки; h_1, h_2 — толщина слоев.

Кроме того, в (4.16) не указаны безразмерные параметры: отношение модулей Юнга материалов к характерному модулю E , коэффициенты Пуассона и относительные толщины $h_1/h, h_2/h$. Ясно, что тензоры $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ есть однородные линейные функции размерных параметров Eh, Eh^2 и Eh^3 , соответственно. Поскольку параметры hN и hN_1 малые, то разумно разложить тензоры $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ в ряд по этим малым параметрам и удержать только первые члены. Однако в силу (4.14) этого нельзя сделать, поэтому поступим следующим образом. Разложим тензоры $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ в асимптотические ряды и сохраним только первые члены, но добавим к тензорам \mathbf{A} и \mathbf{B} тензоры, которые позволяют тождественно удовлетворять (4.14):

$$\mathbf{A} = Eh[\mathbf{A}_0 + O(h)] + (H^2C_1 + 2hN_1C_2^0 + h_1^2C_3^0)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + (hN_1B_5^0 + h_1B_8^0)(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4\mathbf{a}_3), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B} = Eh^2[\mathbf{B}_0 + O(h)] + (hNC_1^0 + h_1C_2^0)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + (hNC_2^0 + h_1C_3^0)\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{C} = Eh^3[\mathbf{C}_0 + O(h)], \quad (4.19)$$

где $O(h)$ — величина порядка h , причем за единицу длины принят модуль минимального радиуса кривизны.

В формулах (4.17) и (4.18) нолики вверху указывают, что соответствующая величина вычислена при hN и hN_1 , стремящихся к нулю, например,

$$C_1^0 = \lim_{hN \rightarrow 0, hN_1 \rightarrow 0} C_1(hN, hN_1, \dots).$$

Тензоры $Eh\mathbf{A}_0, Eh^2\mathbf{B}_0$ и $Eh^3\mathbf{C}_0$ уже не зависят от геометрии, и полные тензоры \mathbf{A}, \mathbf{B} в первом приближении могут быть найдены по формулам (4.17) и (4.18), причем они будут зависеть от геометрии. В теории однослойных оболочек было доказано (глава 3), что тензор \mathbf{B}_0 равен нулю. В двухслойных оболочках это не так, поскольку отражение от касательной плоскости не входит в группу симметрии.

Таким образом, для построения первого приближения тензоров упругости нам будет достаточно экспериментов с пластинами. Даже при этих условиях формулы (4.10)–(4.12) существенно упростить нельзя. Однако некоторые упрощения возможны. Они вытекают из симметричности тензора напряжений. Действительно, в третьей главе была установлена связь между тензором моментов в оболочке и тензором напряжений в трехмерном теле. Для пластин эта связь имеет вид

$$\mathbf{M} = - \int_{-h_1}^{h_2} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} z dz \times \mathbf{n}. \quad (4.20)$$

Находя след тензора \mathbf{M} , получаем

$$\text{tr } \mathbf{M} \equiv \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{a}_1 = \int_{-h_1}^{h_2} \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \mathbf{c} z dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_1 \cdot \cdot \mathbf{M}^T = 0. \quad (4.21)$$

Последнее условие может быть выполнено тогда и только тогда, когда

$$C_1^0 = 0, \quad C_2^0 = 0, \quad B_2^0 = 0, \quad B_5^0 = 0. \quad (4.22)$$

Кроме того, из соотношений (4.14) следуют равенства

$$A_4^0 = 0, \quad A_5^0 = 0, \quad B_8^0 = 0, \quad B_3^0 = 0. \quad (4.23)$$

Поэтому тензор $Eh\mathbf{A}_0$ содержит шесть неизвестных модулей, тензор $Eh^2\mathbf{B}_0$ — пять и тензор $Eh^3\mathbf{C}_0$ — четыре неизвестных модуля. Всего нужно определить 15 неизвестных модулей. Поскольку в дальнейшем будут определяться исключительно “пластинчатые” модули, то нолики сверху будем опускать.

Итак, тензоры упругости ищем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & A_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + A_2(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1) + A_3\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + A_6\mathbf{a}_4\mathbf{a}_4 + \\ & + A_7\mathbf{n}e^\alpha\mathbf{n}e_\alpha + A_8\mathbf{n}(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}^\alpha)\mathbf{n}e_\alpha + H_1^2 C_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + H_1 B_8(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4\mathbf{a}_3), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B} = B_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + B_4\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + B_6\mathbf{a}_1\mathbf{a}_4 + B_7\mathbf{a}_2\mathbf{a}_4 + H_1 C_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{C} = C_3\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + C_4\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 + C_5(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4\mathbf{a}_3) + C_6\mathbf{a}_4\mathbf{a}_4, \quad (4.26)$$

где модули могут быть определены из экспериментов с пластинами. Для пластин формулы (4.24)–(4.26) становятся точными. Более того, в случае ортотропных двухслойных (слои из разных материалов) пластин формулы (4.24)–(4.26) не допускают дальнейших упрощений, т. е. являются минимально полными. Таким образом, двухслойные ортотропные пластины описываются пятнадцатью модулями.

4.2. Определение “плоских” модулей упругости

В этом разделе будут определены все модули, за исключением A_7 и A_8 , входящие в (4.24)–(4.26). Для этого достаточно рассмотреть две сравнительно простые задачи теории упругости анизотропных тел.

Как неоднократно подчеркивалось ранее, для правильного определения модулей необходимо рассматривать только краевые нагрузки. В противном случае необходимо включать в рассмотрение собственные напряжения, т. е. соотношения упругости (4.2) должны быть неоднородными. Рассмотрим следующую задачу. Пусть упругий параллелепипед занимает область

$$-t \leq x \leq t, \quad -s \leq y \leq s, \quad -h_1 \leq z \leq h_2, \quad (4.27)$$

где x, y, z — декартовы координаты.

При этом считаем, что параллелепипед состоит из двух слоев, жестко сцепленных друг с другом. Слой $-h_1 \leq z < 0$ выполнен из ортотропного материала, а верхний слой $0 < z \leq h_2$ выполнен из изотропного материала. Краевые условия примем в следующем виде:

$$z = -h_1 \quad : \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad z = h_2, \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad (4.28)$$

$$x = \pm t \quad : \quad \sigma_x = \begin{cases} a+ & bz(-h_1 \leq z < 0) \\ a'+ & b'z(0 < z \leq h_2), \end{cases} \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \quad (4.29)$$

$$y = \pm s \quad : \quad \sigma_y = \begin{cases} c+ & dz(-h_1 \leq z < 0) \\ c'+ & d'z(0 < z \leq h_2), \end{cases} \quad \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0, \quad (4.30)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{c}', \mathbf{d}'$ — постоянные числа, причем на них в дальнейшем будут наложены дополнительные ограничения, обеспечивающие существование достаточно простых решений.

Решение задачи (4.28)–(4.29) будем искать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} (\mathbf{a} + \mathbf{b}z)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + (\mathbf{c} + \mathbf{d}z)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, & -h_1 < z < 0, \\ (\mathbf{a}' + \mathbf{b}'z)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + (\mathbf{c}' + \mathbf{d}'z)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, & 0 < z \leq h_2. \end{cases} \quad (4.31)$$

Как видно из последнего выражения, тензор напряжений является разрывным, если, конечно, величины со штрихами не равны таковым без штрихов. Разумеется, вектор напряжения $\boldsymbol{\tau}_n \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ непрерывен при переходе через границу раздела слоев. Нетрудно убедиться, что (4.31) удовлетворяет как уравнениям равновесия в объеме, так и краевым условиям. Если при этом оказывается, что тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяет уравнениям неразрывности, то он и является решением задачи. В общем случае (4.31) не обеспечивает существование перемещений, однако при определенных условиях, налагаемых на числа \mathbf{a}, \mathbf{a}' и т. д., решение задачи в виде (4.31) существует.

Для определения перемещений выпишем обобщенный закон Гука в обращенной форме [13]:

$$\begin{aligned} & -h_1 < z < 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_z = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}z}{E_1} - \nu_{12}\frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}z}{E_2}, \\ & \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_x + \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_z = -\nu_{21}\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}z}{E_1} + \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}z}{E_2}, \\ & \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_y + \frac{\sigma_z}{E_3} = -\nu_{31}\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}z}{E_1} - \nu_{32}\frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}z}{E_2}, \\ & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{13}}{G_{13}} = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где модули E_i, ν_{ik} связаны тремя зависимостями

$$\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \quad \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3, \quad \nu_{13}E_1 = \nu_{31}E_3. \quad (4.33)$$

При $0 < z < h_2$ нужно интегрировать “изотропную” систему

$$\begin{aligned} & (E_1 = E_2 = E_3 = E'; \quad \nu_{ik} = \nu') \\ & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'z}{E'} - \nu'\frac{\mathbf{c}' + \mathbf{d}'z}{E'}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu'\frac{\mathbf{a}' + \mathbf{b}'z}{E'} + \frac{\mathbf{c}' + \mathbf{d}'z}{E'}, \\ & \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu'\frac{\mathbf{a}' + \mathbf{c}' + (\mathbf{b}' + \mathbf{d}')z}{E}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для того чтобы исключить смещение пластины как жесткого целого, поставим условие отсутствия смещения и поворота у частицы, находящейся в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z} = 0$.

Решение поставленной задачи не представляет трудности. В результате можно найти как тензор напряжений (4.31), так и вектор перемещения. После этого можно найти их осредненные характеристики. Подставляя последние в соотношения упругости (4.2), получим систему для определения некоторых модулей упругости. Решая указанную систему, находим модули

$$A_1 = \frac{E'h_2}{2(1-\nu')} + \frac{h_1}{4\Delta} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_2} \right), \quad \Delta = \frac{1}{E_1E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_2^2},$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{h_1}{4\Delta} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right), & A_3 &= \frac{E'h_2}{2(1+\nu')} + \frac{h_1}{4\Delta} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_{12}}{E_2} \right), \\
B_1 &= -\frac{E'h_2^2}{4(1-\nu')} + \frac{h_1}{8\Delta} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_2} \right), & B_4 &= \frac{h_1^2}{8\Delta} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right), \\
B_6 &= -\frac{h_1^2}{8\Delta} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right), & B_7 &= \frac{E'h_2^2}{4(1-\nu')} - \frac{h_1^2}{8\Delta} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_{12}}{E_2} \right), \\
C_4 &= \frac{E'h_2^3}{6(1-\nu')} + \frac{h_1^3}{12\Delta} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_2} \right), & C_5 &= \frac{h_1^3}{12\Delta} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right), \\
C_6 &= \frac{E'h_2^3}{6(1+\nu')} + \frac{h_1^3}{12\Delta} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_{12}}{E_2} \right).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Подчеркнем, что эти значения модулей были найдены точно, без каких-либо упрощений. Хотя формулы (4.35) и являются довольно сложными, однако смысл их вполне прозрачен. Представим себе, что мы знаем модули каждого из слоев, рассматриваемых как отдельные пластины. Тогда формулы (4.35) показывают, что суммарные жесткости двухслойной пластины являются суммой соответствующих жесткостей составляющих пластин (слоев), т. е. в данном случае выполнены аксиомы параллельного соединения [164], [172]. Физически это обстоятельство представляется очевидным, когда будем определять жесткости на поперечный сдвиг.

Из формул (4.35) можно получить различные частные случаи. Например, при ($h_1 = h_2 = h/2$) и при принятии условий $E_1 = E_2 = E_3 = E' = E$; $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu' = \nu$ получаем формулы предыдущей главы для однослойных пластин из изотропного материала. Принимая $h_2 = 0$, получаем формулы для однослойной пластины из ортотропного материала. Правда, в этом случае формулы будут сложнее, чем это необходимо, поскольку в качестве несущей поверхности (или поверхности приведения) выбрана одна из лицевых сторон пластины, а не срединная плоскость.

Важным частным случаем формул (4.35) является случай двухслойной пластины, когда материал каждого из слоев является изотропным. В этом случае формулы (4.35) принимают вид

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{E'h_2}{2(1-\nu')} + \frac{Eh_1}{2(1-\nu)}, & A_2 &= 0, & A_3 &= \frac{E'h_2}{2(1+\nu)} + \frac{Eh_1}{2(1+\nu)}, \\
B_1 &= -\frac{E'h_2^2}{4(1-\nu')} + \frac{Eh_1^2}{4(1-\nu)}, & B_4 &= B_6 = 0, & B_7 &= \frac{E'h_2^2}{4(1+\nu')} - \frac{Eh_1^2}{4(1+\nu)}, \\
C_4 &= \frac{E'h_2^3}{6(1-\nu')} + \frac{Eh_1^3}{6(1-\nu)}, & C_5 &= 0, & C_6 &= \frac{E'h_2^3}{6(1+\nu')} + \frac{Eh_1^3}{6(1+\nu)}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

В этих формулах параллельное соединение просматривается уже совершенно отчетливо.

Таким образом, десять из пятнадцати модулей, входящих в (4.24)–(4.26), определены. Еще три модуля могут быть найдены из следующей задачи:

$$z = -h_1, \quad h_2 \quad : \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \tag{4.37}$$

$$x = \pm t \quad : \quad \tau_{xy} = \begin{cases} a + bz, & -h_1 \leq z < 0, \\ a' + b'z, & 0 < z \leq h_2, \end{cases} \quad \sigma_x = \tau_{xz} = 0, \tag{4.38}$$

$$\mathbf{y} = \pm s \quad : \quad \tau_{yx} = \begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b}z, & -h_1 \leq z < 0, \\ \mathbf{a}' + \mathbf{b}'z, & 0 < z \leq h_2, \end{cases} \quad \sigma_y = \tau_{yz} = 0. \quad (4.39)$$

В этой задаче рассматривается сдвиг двухслойной пластины в своей плоскости касательными напряжениями, приложенными к боковым поверхностям.

Тензор напряжений, удовлетворяющий уравнениям равновесия в объеме и краевым условиям (4.37)–(4.39), имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} (\mathbf{a} + \mathbf{b}z)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) & -h_1 \leq z < 0, \\ (\mathbf{a}' + \mathbf{b}'z)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) & 0 < z \leq h_2. \end{cases} \quad (4.40)$$

Вектор перемещений определяется формулой

$$\mathbf{u}_* = \begin{cases} \frac{1}{G_{12}} [(\mathbf{a} + \mathbf{b}z)(y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2) - bxy\mathbf{n}], & -h_1 \leq z < 0, \\ \frac{1}{G'} [(a' + b'z)(y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2) - b'xy\mathbf{n}], & 0 < z \leq h_2. \end{cases}$$

Условия непрерывности перемещений

$$aG' = a'G_{12}, \quad bG' = b'G_{12}. \quad (4.41)$$

Таким образом, вектор перемещения определяется формулой

$$\mathbf{u}_* = \frac{1}{G_{12}} [(\mathbf{a} + \mathbf{b}z)(y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2) - bxy\mathbf{n}], \quad -h_1 \leq z < h_2. \quad (4.42)$$

Подставляя это выражение в формулы (4.44), (4.46), находим векторы смещения и поворота в пластине

$$G_{12}\mathbf{u} = \mathbf{a}(y\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2) - bxy\mathbf{n}, \quad (4.43)$$

$$G_{12}\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{b}(y\mathbf{e}_2 - x\mathbf{e}_1). \quad (4.44)$$

Тензоры деформации имеют вид

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{a}}{G_{12}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad \boldsymbol{\kappa} = -\frac{\mathbf{b}}{G_{12}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2). \quad (4.45)$$

Осредняя (4.40), находим тензоры усилий и моментов

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{a} \left(h_1 + \frac{G'}{G_{12}}h_2 \right) + \frac{1}{2}\mathbf{b} \left(\frac{G'}{G_{12}}h_2^2 - h_1^2 \right) \right] (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad (4.46)$$

$$\mathbf{M} = \left[\frac{1}{2}\mathbf{a} \left(h_2^2 \frac{G'}{G_{12}} - h_1^2 \right) + \frac{1}{3}\mathbf{b} \left(\frac{G'}{G_{12}}h_2^3 + h_1^3 \right) \right] (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1). \quad (4.47)$$

Продельвая ту же процедуру, что и при решении предыдущей задачи, находим следующие значения для модулей A_6, B_8, C_3 .

$$A_6 = G'h_2 + G_{12}h_1, \quad B_8 = \frac{1}{2}(G_{12}h_1^2 - G'h_2^2), \quad C_3 = \frac{1}{3}(G'h_2^3 + G_{12}h_1^3). \quad (4.48)$$

В этих формулах также отчетливо просматривается параллельное соединение.

Формулами (4.36) и (4.48) заканчивается определение “плоских” модулей упругости.

4.3. Определение модулей поперечного сдвига

В предыдущем разделе были получены конечные и сравнительно простые формулы для “плоских” модулей упругости. При этом сказалось, что все они могут быть найдены по схеме параллельного соединения, если известны жесткость составляющих пластину слоев. Для модулей поперечного сдвига A_7 и A_8 ситуация оказывается значительно сложнее. Никаких конечных формул в этом случае получить невозможно. В данном случае не работают ни аксиома параллельного, ни аксиома последовательного соединения слоев. Однако в частных случаях модули могут быть определены либо по схеме параллельного, либо по схеме последовательного соединений. Существуют промежуточные случаи, когда одинаково неверными являются обе схемы. В этом разделе будет рассмотрена методика определения модулей A_7 и A_8 , которые в конечном счете будут выражаться через корни некоторых трансцендентных уравнений. Для определения модулей A_7 и A_8 рассмотрим две задачи для бесконечных двухслойных полос. Если бы материалы слоев были бы изотропными, то хватило бы одной задачи.

Сначала рассмотрим следующую задачу:

$$x = \pm t \quad : \quad \sigma_x = \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{xy} = f(z), \quad (4.49)$$

$$z = -h_1, h_2 \quad : \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (4.50)$$

Функция $f(z)$ пока не определена и будет задана позднее из соображений простоты решения некоторых физических рассуждений. С формальной точки зрения выбор $f(z)$ практически безразличен.

Кроме того, мы должны поставить условие ограниченности перемещений и напряжений при $y \rightarrow \pm\infty$.

Будем искать такое решение задачи теории упругости (4.49)–(4.50), в котором перемещение имеет вид:

$$u_x = 0, \quad v_x = v_x(x, z), \quad w_* = 0. \quad (4.51)$$

Конечно, такое решение возможно не для произвольных функций $f(z)$. Последняя должна удовлетворять некоторым условиям разрешимости. Звездочки у перемещений мы пока будем опускать и вновь введем их, только когда обратимся к двумерной теории.

Тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$, соответствующий перемещению (4.51), имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} G_{12} \frac{\partial v}{\partial x} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + G_{23} \frac{\partial v}{\partial z} (\mathbf{e}_2 \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{e}_2), & -h_1 \leq z < 0, \\ G' \frac{\partial v}{\partial x} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + G' \frac{\partial v}{\partial z} (\mathbf{e}_2 \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{e}_2), & 0 < z \leq h_2. \end{cases} \quad (4.52)$$

Функция $v(x, z)$ должна быть непрерывной по обеим переменным. Уравнения равновесия будут удовлетворены, если функция v удовлетворяет следующим уравнениям:

$$G_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad -h_1 \leq z < 0, \quad (4.53)$$

$$G' \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0, \quad 0 \leq z < h_2.$$

Краевые условия (4.50) принимает вид:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=-h_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h_2} = 0. \quad (4.54)$$

Кроме того, нужно поставить условия сопряжения на плоскости раздела материалов

$$v(x, +0) = v(x, -0), \quad G_{23} \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=-0} = G' \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=+0}. \quad (4.55)$$

Решение задачи (4.53)–(4.55), (4.49), (4.50) можно искать методом разделения переменных Фурье

$$v(x, z) = X(x)Z(z). \quad (4.56)$$

Для функций Z получаем следующую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} G_{23}Z'' + \lambda^2 G_{12}Z &= 0, & -h_1 < z < 0, \\ G'Z'' + \lambda^2 G'Z &= 0, & 0 < z < h_2, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$Z'|_{z=-h_1} = 0, \quad Z'|_{z=h_2} = 0, \quad Z|_{z=+0} = Z|_{z=-0}, \quad G_{23}Z'|_{z=0} = G'Z'|_{z=+0}. \quad (4.58)$$

Нетрудно убедиться, что собственные функции задачи (4.56)–(4.58) имеют вид

$$Z = \begin{cases} A \cos \lambda \eta (z + h_1), & h_1 \leq z \leq 0, \\ B \cos \lambda (z - h_2), & 0 \leq z \leq h_2, \end{cases} \quad (4.59)$$

где

$$\eta^2 = G_{12}/G_{23}, \quad \mu = G_{23}/G'. \quad (4.60)$$

Постоянные A и B удовлетворяют системе уравнений

$$A \cos \lambda \eta h_1 - B \cos \lambda \eta h_2 = 0, \quad A G_{23} \eta \sin \lambda \eta h_1 + B G' \sin \lambda \eta h_2 = 0. \quad (4.61)$$

Равенство нулю определителя этой системы доставляет уравнение для определения собственных чисел

$$\mu \eta \cos \lambda h_2 \sin \lambda \eta h_1 + \cos \lambda \eta h_1 \sin \lambda h_2 = 0. \quad (4.62)$$

Последнее уравнение удобно записать в другом виде, если ввести обозначения

$$\gamma = \lambda h_1, \quad h = h_1 + h_2, \quad h_1 = \alpha h, \quad h_2 = (1 - \alpha)h. \quad (4.63)$$

Тогда уравнение (4.63) примет вид

$$\mu \eta \cos(1 - \alpha)\gamma \sin \eta \alpha \gamma + \cos \eta \alpha \gamma \sin(1 - \alpha)\gamma = 0. \quad (4.64)$$

К сожалению, это уравнение содержит слишком много параметров, которые к тому же меняются в широких пределах:

$$0 \leq \mu < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4.65)$$

Следовательно, аналитическое нахождение корней уравнений (4.64) обречено на провал. Тем не менее оно легко решается численно для любых конкретных значений параметров μ, η, α . Для наших целей нам необходимо знать только низший положительный корень уравнения (4.64).

Выясним, при каких условиях, налагаемых на функцию $f(z)$ — краевую нагрузку, задача (4.49)–(4.50) имеет решение, представимое в виде (4.51). Предварительно получим тождество, которому удовлетворяют все собственные функции (4.59). Для этого проинтегрируем первое уравнение из (4.57) по интервалу $[-h_1, 0]$, а второе — по интервалу $[0, h_2]$ и сложим получившиеся равенства. В результате придем к следующему тождеству:

$$\int_{-h_1}^0 G_{12}Z_\lambda(z) dz + \int_0^{h_2} G'Z_\lambda(z) dz = 0. \quad (4.66)$$

Вычислим теперь сдвигающее усилие T_{12} :

$$T_{12} = \int_{-h_1}^{h_2} \tau_{xy} dz = X'_\lambda \left[\int_{-h_1}^0 G_{12} Z_\lambda dz + \int_0^{h_2} G' Z_\lambda dz \right] = 0.$$

Последнее равенство справедливо при всех x , в том числе и на гранях $x = \pm t$, поэтому условие разрешимости имеет вид

$$\int_{-h_1}^{h_2} f(z) dz = 0. \quad (4.67)$$

Таким образом, на границах $x = \pm t$ сдвигающая сила T_{12} отсутствует. Однако будем считать (чтобы задача не теряла смысла с точки зрения теории пластин), что крутящий момент на границе отличен от нуля.

Пусть λ_0 — наименьший корень уравнения (4.64) или (4.62). Тогда соответствующая ему собственная функция Z_0 имеет на интервале ровно один нуль, в то время как все остальные функции имеют внутри интервала $(-h_1, h_2)$ не меньше двух нулей. Естественно, что с физической точки зрения нас интересует только первая собственная функция Z_0 , поскольку решения, отвечающие другим собственным функциям, заведомо не могут быть описаны в рамках теории пластин.

Примем, что функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = \begin{cases} G_{12} Z_0(z), & -h_1 < z < 0, \\ G' Z_0(z), & 0 < z < h_2. \end{cases} \quad (4.68)$$

В этом случае решение задачи (4.49)–(4.50) имеет простейший вид

$$v_*(x, z) = X_0(x) Z_0(z), \quad (4.69)$$

где Z_0 определена формулой (4.59), а X_0 определяется выражением

$$X_0 = \frac{\text{sh} \lambda_0 x}{\lambda_0 \text{ch} \lambda_0 t}. \quad (4.70)$$

Решение задачи для полосы, неограниченной вдоль оси x , следует из предыдущей посредством замен $x \rightarrow y$, $G_{23} \rightarrow G_{13}$, $f(z) \rightarrow g(z)$. Вместо перемещения $v(x, z)$ в решение будет входить функция $u(y, z)$ — смещение вдоль оси x . Теперь обратимся к решению тех задач, но с позиции теории пластин. Первая задача состоит в рассмотрении бесконечной вдоль оси полосы при следующих краевых условиях:

$$x = \pm t, \quad \pm \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \pm \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{M} = \mp M_{12}^* \mathbf{e}_1, \quad (4.71)$$

где M_{12}^* — заданный на краях $x = \pm t$ крутящий момент, который легко вычислить по заданной нагрузке $f(z)$:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{M}|_{x=\pm t} = -\mathbf{e}_1 \cdot \langle \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} z \rangle|_{x=\pm t} \times \mathbf{n} = -\langle f(z) z \rangle \mathbf{e}_1 \Rightarrow M_{12}^* = \langle f z \rangle. \quad (4.72)$$

Решение задачи (4.71) ищем в виде

$$\mathbf{u} = v(x) \mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\varphi} = -\varphi_2(x) \mathbf{e}_1 \Rightarrow \quad (4.73)$$

$$\mathbf{e} = v' \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \varphi_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\kappa} = -\varphi_2' \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1. \quad (4.74)$$

Подставляя тензоры деформации (4.74) в определяющие уравнения (4.2) и используя формулы для тензоров упругости (4.25)–(4.26), получаем

$$\mathbf{T} = (A_6 v' - B_8 \varphi_2') \mathbf{a}_4 + (A_7 - A_8) \varphi_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{n}, \quad \mathbf{M} = -(c_3 \varphi_2' - B_8 v') \mathbf{a}_2. \quad (4.75)$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия, получаем два уравнения для определения функций $v(x)$ и $\varphi_2(x)$. Они имеют вид:

$$(A_6 v' - B_8 \varphi_2')' = 0, \quad (c_3 \varphi_2' - B_8 v')' - (A_7 - A_8) \varphi_2 = 0. \quad (4.76)$$

Находя решение этих уравнений, подчиняя их краевым условиям (4.71) и учитывая нечетность функций v и φ_2 , получаем

$$v = \frac{B_8}{A_6} \varphi_2, \quad \varphi_2 = \frac{\lambda \langle zf(z) \rangle \operatorname{sh} \lambda x}{A_7 - A_8 \operatorname{ch} \lambda t}, \quad (4.77)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{A_6(A_7 - A_8)}{A_6 c_3 - B_8^2}. \quad (4.78)$$

Сравним результаты, полученные по теории пластин, с результатами теории упругости. Используя формулы (4.46) и (4.47), а также (4.51), получаем формулы для тензоров усилий и моментов

$$\mathbf{T} = X_0 \left[\int_{-h_1}^0 G_{23} Z_0' dz + \int_0^{h_2} G' Z_0' dz \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{n}, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{M} = -X_0' \langle zf(z) \rangle \mathbf{a}_2, \quad (4.80)$$

где X_0 определяется по формуле (4.70).

Формулу (4.79) можно переписать в упрощенном виде, если учесть тождество

$$\int_{-h_1}^0 G_{23} Z_0' dz + \int_0^{h_2} G' Z_0' dz = \lambda_0^2 \langle zf(z) \rangle, \quad (4.81)$$

которое вытекает из уравнений (4.57) после умножения их на z , интегрирования по соответствующим интервалам $[-h_1, 0]$ и $[0, h_2]$ и последующего сложения получившихся тождеств. Тогда вместо (4.79) можно написать более простое выражение

$$\mathbf{T} = \lambda_0^2 X(x) \langle zf(z) \rangle \mathbf{e}_2 \mathbf{n}. \quad (4.82)$$

Сравнивая последнее выражение с формулами (4.75), приходим к необходимости выполнения соотношения

$$\lambda_0 \frac{\operatorname{sh} \lambda_0 x}{\operatorname{ch} \lambda_0 t} = \lambda \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_0. \quad (4.83)$$

Таким образом, для модулей получили соотношение (4.78), в котором в левую часть нужно подставить вместо λ наименьший положительный корень уравнения (4.62) λ_0 . Если равенство (4.83) выполнено, то легко убедиться, что моменты, определенные по формулам (4.80) и второй из формул (4.75), в точности совпадают. Проводя совершенно аналогичные рассуждения для задачи о деформации полосы, неограниченной вдоль оси x , получим еще одно равенство, аналогичное (4.78).

В результате для модулей поперечного сдвига A_7, A_8 получим систему двух уравнений

$$\frac{A_6(A_7 - A_8)}{A_6C_3 - B_8^2} = \lambda_0^2, \quad \frac{A_6(A_7 + A_8)}{A_6C_3 - B_8^2} = \tilde{\lambda}_0^2, \quad (4.84)$$

где λ_0 — наименьший положительный корень уравнения (4.62), а $\tilde{\lambda}_0$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{G_{13}}{G'} \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{13}}} \cos \tilde{\lambda} h_2 \sin \left(\tilde{\lambda} \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{13}}} h_1 \right) + \cos \left(\tilde{\lambda} \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{13}}} h_1 \right) \sin \tilde{\lambda} h_2 = 0. \quad (4.85)$$

Если $G_{13} = G_{23}$, то уравнения (4.85) и (4.62) совпадают и $\lambda_0 = \tilde{\lambda}_0$. В этом случае имеем следующие значения для модулей поперечного сдвига:

$$A_7 = \lambda_0^2 \frac{A_6C_3 - B_8^2}{A_6}, \quad A_8 = 0. \quad (4.86)$$

Интересно более подробно проанализировать случай двух изотропных слоев с модулями сдвига G и G' . В этом случае для определения λ_0 имеем уравнение

$$G \cos \lambda h_2 \sin \lambda h_1 + G' \cos \lambda h_1 \sin \lambda h_2 = 0. \quad (4.87)$$

Рассмотрим теперь два частных случая а) $h_1 = 0, h_2 \neq 0$, б) $h_1 \neq 0, h_2 = 0$. В первом случае по формулам (4.30) имеем

$$A'_6 = G'h_2, \quad B'_8 = -\frac{1}{2}G'h_2^2, \quad C'_3 = \frac{1}{3}G'h_2^3. \quad (4.88)$$

Наименьший корень уравнения (4.87) равен $\lambda_0 = \pi/h_2$. Следовательно, согласно уравнению (4.86) для A_7 получаем формулу

$$A_7 = \frac{\pi^2}{12}G'h_2. \quad (4.89)$$

Во втором случае имеем аналогичные формулы

$$A''_6 = Gh_1, \quad B''_8 = \frac{1}{2}, \quad C''_3 = \frac{1}{3}Gh_1^3, \quad A''_7 = \frac{\pi^2}{12}Gh_1. \quad (4.90)$$

Если пластина состоит из двух жестко сцепленных слоев, то ее суммарные жесткости (4.30) находятся по схеме параллельного соединения

$$A_6 = A'_6 + A''_6, \quad B_8 = B'_8 + B''_8, \quad C_3 = C'_3 + C''_3.$$

Что касается модуля поперечного сдвига, то можно попробовать написать выражения по схеме параллельного соединения

$$A_7^{**} = \frac{\pi^2}{12}(G'h_2 + Gh_1) \quad (4.91)$$

либо по схеме последовательного соединения

$$A_7^* = \frac{\pi^2}{12} \frac{G'h_2Gh_1}{G'h_2 + Gh_1}. \quad (4.92)$$

Таблица 4.1:

G/G'	h_1/h_2	λh_2	A_7/A_7^*	A_7/A_7^{**}
10^5	10^{-3}	1,5772127	1,00245	0,001
10^5	10^{-2}	1,5714187	1,00412	0,0001
10^5	10^{-1}	1,5708577	26,206197	0,0026154
10^5	1	1,5708	25396,999	0,2501178
10^5	10	0,3141576	1175499,9	1,00
10^5	10^2	0,0314165	10^7	1,00
10^4	10^{-1}	1,5709223	3,6912959	0,0036837
10^4	1	1,5708	2620,414	0,261574
10^4	10	0,3141416	101761,72	1,00
10^4	10^2	0,0314165	10^6	1,00
10^3	0,1	1,5770859	1,417563	0,0395779
10^3	1	1,5708	253,514	0,2529939
10^3	10^2	0,0314165	10^5	1,00
10^3	10	0,3141273	10^4	1,00
10^2	10^{-1}	1,570815	1,2100503	0,1
10^2	1	1,5708	28,495942	0,2794084
10^2	10	0,3138359	999,47663	0,99742
10^2	10^2	0,0314165	10^4	0,9992322
6,329	0,45	1,7297109	2,557163	0,4918335
3	10^{-2}	3,050581	35,257515	0,999629
3	10^{-1}	2,49	3,54426692	0,80150854
3	0,5	1,823513	3,0462468	0,731126
3	1	1,5708	4,33333298	0,8124993
3	2	1,209429	8,3250073	1,00
3	10	0,3037597	32,38463	1,00
3	10^2	0,0313129	303,773	1,00
0,5	10^{-2}	3,1260038	201,0329	1,00
0,5	10^{-1}	2,9888961	22,30342	1,00
0,5	1	1,5708	4,1249994	0,9166662
0,5	10	0,2645203	5,98492	0,83123
0,5	10^2	0,0308	51,839	0,996
0,1	10^{-2}	3,1385	1002,0864	1,00
0,1	10^{-1}	3,1095	102,51328	1,00
0,1	1	1,5708	6,0249963	0,4979335
0,1	10	0,2024	2,34513	0,58628
0,1	10^2	0,0286234	11,662	0,963

Из физических соображений понятно, что модуль сдвига A_7 должен лежать в интервале

$$\frac{\pi^2 G'h_2 G h_1}{12 G'h_2 + G h_1} \leq A_7 \leq \frac{\pi^2}{12} (G'h_2 + G h_1). \quad (4.93)$$

Истинное значение A_7 находится по формуле (4.86), где определяется как низший корень уравнения (4.87). Модуль A_7 для различных значений параметров приводится в табл. 4.1, из которой видно, что модуль A_7 может быть близок к концам интервала (4.93), а может быть и достаточно далек от концов интервала.

На этом заканчивается определение всех модулей упругости для двухслойных оболочек, и нужно переходить к решению конкретных задач, которые можно решать известными методами, поэтому этот вопрос оставляем в стороне.

Глава 5.

Теория тонких трехслойных оболочек симметричного строения

5.1. Исходные соотношения

В этой главе теория простых оболочек применяется для описания тонких трехслойных оболочек симметричного строения. Для тонких оболочек допустимо ограничиться простейшей теорией, в которой игнорируются тензоры начальных напряжений. Кроме того, будем считать, что внешние слои выполнены из одинаковых изотропных материалов, а внутренний слой выполнен из другого изотропного материала. В качестве поверхности приведения выбираем срединную поверхность, касательная плоскость которой при $\mathbf{b} \rightarrow 0$ является плоскостью симметрии. Как было показано во второй и третьей главах, дело в этом случае сводится к заданию энергии деформации в виде

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (5.1)$$

где тензоры упругости определены формулами

$$\mathbf{C}_1 = A_1 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + A_2 (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{C}_3 = C_1 \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} + C_2 (\mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{r}^\beta \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}^\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}), \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{a}. \quad (5.4)$$

Тензоры деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ определены формулами (2.150), (2.151) и (2.148), соответственно. Энергия деформации (5.1) положительно определена, если выполнены неравенства

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad \boldsymbol{\Gamma} > 0, \quad (5.5)$$

где модули упругости зависят от характеристик материала слоев и толщины слоев. В третьей главе было доказано, что тензоры упругости \mathbf{C}_i ($i = 1, 2, 3$), $\boldsymbol{\Gamma}$ для оболочек из трансверсально-изотропного материала имеют вид (3.120)–(3.122), (3.127). Кроме того, в простейшей теории тонких оболочек допустимо принять $\mathbf{C}_2 = 0$, что и учтено в (5.1).

Примем обозначения: h_2, E_2, ν_2, G_2 — толщина, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига внешнего слоя; h_1, E_1, ν_1, G_1 — полутолщина, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модуль сдвига внутреннего слоя (заполнителя). Модули (5.5) определяются аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, поэтому приведем формулы для них без вывода

$$A_1 = \frac{E_2 h_2}{1 - \nu_2} + \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1}, \quad A_2 = \frac{E_2 h_2}{1 + \nu_2} + \frac{E_1 h_1}{1 + \nu_1}, \quad (5.6)$$

$$C_1 = \frac{E_1 h_1^3}{3(1-\nu_1)} + \frac{E_2(h^3 - h_1^3)}{3(1-\nu_2)}, \quad C_2 = \frac{E_1 h_1^3}{3(1+\nu_1)} + \frac{E_2(h^3 - h_1^3)}{3(1+\nu_2)}, \quad (5.7)$$

$$\Gamma = \frac{\gamma^2 C_2}{h^2}, \quad h = h_1 + h_2, \quad (5.8)$$

где $\gamma \geq 0$ — наименьший неотрицательный корень уравнения

$$G_2 \sin \gamma(1 - \alpha) \sin \gamma \alpha - G_1 \cos \gamma(1 - \alpha) \cos \gamma \alpha = 0, \\ h_1 = \alpha h, \quad h_2 = (1 - \alpha)h. \quad (5.9)$$

Справедливо неравенство

$$\frac{\pi^2}{6} \frac{G_1 h_1 G_2 h_2}{4G_1 h_1 + G_2 h_2} \leq \Gamma \leq \frac{\pi^2}{6} (G_1 h_1 + G_2 h_2). \quad (5.10)$$

Оно позволяет дать оценки сверху и снизу для критических нагрузок при исследовании устойчивости трехслойных пластин.

Если Γ , найденное по (5.8)–(5.9), близко к правой части неравенства (5.10), то для такой пластины допустимо применение кинематических гипотез типа плоских сечений. В противном случае использовать кинематические гипотезы недопустимо.

При задании энергии деформации соотношения Коши–Грина для тензоров усилий и моментов принимают вид (изотермические процессы)

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}^\times}, \quad \mathbf{M}_\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{K}^\times}. \quad (5.11)$$

В эти выражения входят производные по \mathbf{A}^\times и \mathbf{K}^\times , но W задано как функция приведенных тензоров деформации Φ , \mathcal{E} , γ , поэтому (5.11) удобнее записать в другом виде, аналогично тому, как это было сделано в разд. 3.5. Выберем векторы \mathbf{d}_k так, чтобы $\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{n}$, где \mathbf{e}_α — главные оси тензора \mathbf{b} . Тогда легко убедиться в наличии формулы

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Приведенные тензоры деформации (2.148), (2.150) и (2.151) имеют вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times T} - \mathbf{a}), \quad \gamma = \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{n}, \\ \Phi = \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{\times T} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{A}^{\times T} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \quad (5.12)$$

Тогда соотношениям Коши–Грина можно придать вид

$$\mathbf{T}_\pi = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} \cdot \nabla \mathbf{R} + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \otimes \mathbf{D}_3 + \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)^T \cdot \mathbf{K}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^T - \\ - \frac{1}{2} \left[\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \cdot \frac{\partial W}{\partial \Phi} - \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi} \right)^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \right] \cdot \nabla \mathbf{R}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{M}_\pi = \frac{\partial W}{\partial \Phi} \cdot \mathbf{A}^\times \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (5.14)$$

Здесь соотношения Коши–Грина записаны для тензоров усилий и моментов Пиолы–Кирхгофа. Именно в этом виде они потребуются в дальнейшем, но можно было бы записать их и для энергетических, и для истинных тензоров усилий и моментов.

Согласно (5.1) получаем формулы

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \right)^\top = \mathbf{C}_3 \cdot \cdot \boldsymbol{\Phi}. \quad (5.15)$$

Добавляя к приведенным соотношениям уравнения движения, краевые и начальные условия, получаем замкнутую систему уравнений теории тонких трехслойных оболочек. Остальные разделы этой главы будут посвящены приложению предложенной теории к исследованию трехслойной полосы и сравнению результатов с известными теоретическими и экспериментальными данными. Подчеркнем, что предложенная теория отличается от теории однослойных оболочек только значениями упругих модулей и имеет по сравнению с известными вариантами трехслойных оболочек вдвое более низкий порядок системы основных дифференциальных уравнений.

Результаты оставшейся части этой главы получены совместно с Х. Альтенбахом (Магдебург, ГДР).

5.2. Постановка задачи об устойчивости трехслойной полосы при сжатии

Полоса занимает область $\{|x| \leq l, \quad |y| \leq \infty\}$ и нагружена по границам $x = \pm l$ силами интенсивности $\mathbf{P} = \text{const}$.

Очевидно, что в этом случае деформация полосы описывается вектором смещения

$$\mathbf{u}(x, y) = u(x)\mathbf{e}_1 + w(x)\mathbf{n}, \quad \mathbf{R}(x, y) = \mathbf{r}(x, y) + \mathbf{u} \quad (5.16)$$

и ортогональным тензором

$$\mathbf{P}(x, y) = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \cos \psi(x)(\mathbf{I} - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \sin \psi(x)\mathbf{e}_2 \times \mathbf{I}, \quad (5.17)$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ — орты осей x, y и вектор нормали к недеформированной полосе; u и w — продольное и нормальное смещения тел-точек полосы; ψ — угол поворота тел-точек полосы орта \mathbf{e}_2 против часовой стрелки.

Уравнения равновесия в недеформированной метрике имеют вид (2.72), (2.73):

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_\pi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{M}_\pi + (\nabla \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{T}_\pi)_\times = 0, \quad \nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y}. \quad (5.18)$$

Согласно формулам (2.97) и (2.101), для \mathbf{K}^\times имеем представление (только в данном случае)

$$\mathbf{K}^\times = \psi' \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \quad ()' \equiv \frac{d}{dx} (). \quad (5.19)$$

Тогда для приведенных тензоров деформации получаем формулы

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \varepsilon_{11} \equiv u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2), \quad (5.20)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{e}_1, \quad \gamma_1 = (1 + u') \sin \psi + w' \cos \psi, \quad (5.21)$$

$$\Phi = \psi' \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (5.22)$$

Соотношения упругости в данной задаче по (5.13)–(5.15) и (5.20)–(5.22) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\pi = \mathcal{E}_{11}[(A_1 + A_2)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (A_1 - A_2)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2] + \mathcal{E}_{11}[(A_1 + A_2)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{u}' + \\ + \Gamma\gamma_1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{D}_3 + \psi'^2(C_1 + C_2)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\pi = \psi'[(C_1 + C_2)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - (C_1 - C_2)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1] \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{D}_3) - \\ - \psi'(C_1 - C_2)\mathbf{e}_2 \otimes (\mathbf{u}' - \mathbf{u}' \cdot \mathbf{D}_3 \mathbf{D}_3), \end{aligned} \quad (5.24)$$

где \mathbf{D}_3 есть “повернутый” вектор \mathbf{n}

$$\mathbf{D}_3 = \sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{n}. \quad (5.25)$$

Для завершения постановки задачи осталось сформулировать краевые условия:

$$x = \pm l, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}_\pi \cdot \mathbf{e}_1 = P, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad w = 0, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{M}_\pi \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2. \quad (5.26)$$

Итак, получили нелинейную краевую задачу для определения трех функций \mathbf{u} , w , ψ .

5.3. Разрешающие уравнения и определение критической нагрузки

Поскольку тензоры \mathbf{T}_π и \mathbf{M}_π зависят только от координаты x , то из первого уравнения (5.18) получаем

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T}_\pi = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{n}, \quad q_i = \text{const}. \quad (5.27)$$

Из уравнения (5.26) получаем, что $q_1 = P$.

Проектируя (5.27) на орты \mathbf{e}_α , \mathbf{n} и учитывая (5.18), приходим к трем скалярным уравнениям

$$\mathcal{E}_{11}(A_1 + A_2) + \mathcal{E}_{11}(A_1 + A_2)\mathbf{u}' + \Gamma\gamma_1 \sin \psi = P, \quad (5.28)$$

$$\mathcal{E}_{11}(A_1 + A_2)w' + \Gamma\gamma_1 \cos \psi = q_3, \quad q_2 = 0. \quad (5.29)$$

Легко проверяется формула

$$(\nabla \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}_\pi)_x = -q_3 \mathbf{e}_2 + (\mathbf{u} \times \mathbf{q})'.$$

Тогда второе уравнение системы (5.18) переписывается в виде

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{M}_\pi + \mathbf{u} \times \mathbf{q} - q_3 x \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\varphi} = \text{const}$$

или с учетом (5.24)

$$[(C_1 + C_2)\psi' + wP - \mathbf{u}q_3 - q_3 x] \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\varphi}. \quad (5.30)$$

Поскольку задача симметрична относительно плоскости $x = 0$, то $q_3 = 0$. Далее условие

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{M}_\pi \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi' = 0, \quad x = \pm l.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{\varphi}$ равен нулю. Таким образом, получили уравнение

$$(C_1 + C_2)\psi' + Pw = 0. \quad (5.31)$$

Уравнения (5.31), (5.28) и (5.29) с учетом (5.20) и (5.21), а также $q_3 = 0$, доставляют искомую систему разрешающих уравнений. Она имеет при всех значениях P решение

$$u = u(x) \neq 0, \quad w = \psi = 0. \quad (5.32)$$

Действительно, уравнения (5.29) и (5.31) при этом выполняются, а уравнение (5.28) принимает вид

$$u'(1 + u')(1 + \frac{1}{2}u') = \frac{P}{A_1 + A_2}. \quad (5.33)$$

Нас интересуют решения этого уравнения, удовлетворяющие условию

$$u'(x) > -1. \quad (5.34)$$

При $P > 0$, т. е. при растяжении полосы, уравнение (5.33) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (5.34). Оно может быть найдено методом последовательных приближений или непосредственно как корень кубического уравнения. При не слишком больших значениях параметра $P(A_1 + A_2)^{-1}$ достаточным является первое приближение

$$u'(x) = \frac{P}{A_1 + A_2}. \quad (5.35)$$

При больших отрицательных P

$$\frac{P}{A_1 + A_2} < -\frac{1}{3\sqrt{3}} \simeq -0,192 \quad (5.36)$$

уравнение (5.33) не имеет ни одного решения, удовлетворяющего условию (5.34). При

$$P = -\frac{A_1 + A_2}{3\sqrt{3}} \quad (5.37)$$

имеет одно решение, совместимое с (5.34).

При

$$-\frac{1}{3\sqrt{3}} < \frac{P}{A_1 + A_2} < 0 \quad (5.38)$$

уравнение (5.33) имеет два решения, совместимых с (5.34). Описанная ситуация плохо согласуется с интуитивными представлениями о поведении материала при сжатии. Это связано с тем, что задание энергии деформации в виде квадратичной формы от приведенных тензоров деформации неудовлетворительно, поскольку оно не обладает нужным характером возрастания силы при больших деформациях. Например, для сжатия полосы в линию нужна конечная сила и конечная энергия. Математически это означает, что энергия деформации (5.1) нарушает при больших деформациях условия Адамара или даже условия сильной эллиптичности, поэтому область применимости энергии деформации (5.1) ограничена достаточно малыми деформациями. В данной задаче энергия деформации должна удовлетворять не условию (5.34), а более сильному неравенству.

$$u' > -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq -0,423, \quad (5.39)$$

т. е. допустимы деформации порядка 40%, но не более. Дополнительные решения с деформацией более 40% следует рассматривать как лишние и не принимать во внимание. Для

оболочек из твердого материала типа металла, керамики и т.д. это ограничение практически не существенно и использование энергии деформации (5.1) допустимо.

Нетрудно предложить другие формы энергии деформации, применимые в большей области, но в данной работе они не находят приложения и потому не приводятся. Для тонких конструкций исчерпание их несущей способности происходит при малых деформациях сжатия, заведомо удовлетворяющих неравенству (5.33), имеет единственное решение, совместимое с (5.39), как при положительных так и при отрицательных значениях силы P . Более того, можно считать, что

$$u'^2 \ll 1. \quad (5.40)$$

Тогда из уравнения (5.33) получаем

$$u' = \frac{1}{3} \left[\sqrt{1 + \frac{6P}{A_1 + A_2}} - 1 \right] \simeq \frac{P}{A_1 + A_2}. \quad (5.41)$$

Таким образом, одна из равновесных конфигураций найдена. Она имеет вид

$$u(x) = \frac{x}{3} \left[\sqrt{1 + \frac{6P}{A_1 + A_2}} - 1 \right], \quad w(x) = 0, \quad \psi(x) = 0. \quad (5.42)$$

При этом относительно силы P предполагается, что она удовлетворяет неравенству (5.40). Имеется еще одна равновесная конфигурация, ее описывают функции

$$u(x) = 0, \quad \psi(x) = \psi_0 = \text{const}, \quad w(x) = 0. \quad (5.43)$$

Здесь полоса испытывает только поперечный сдвиг. При этом тензоры Пиолы-Кирхгофа (5.23) и (5.24) принимают вид

$$\mathbf{T}_\pi = \Gamma \sin \psi_0 \mathbf{e}_1 \otimes (\sin \psi_0 \mathbf{e}_1 + \cos \psi_0 \mathbf{n}), \quad \mathbf{M}_\pi = 0. \quad (5.44)$$

Краевые условия (5.26) сводятся к равенству

$$\Gamma \sin^2 \psi_0 = P. \quad (5.45)$$

Это уравнение имеет решение только при $P > 0$. Кроме того, должно быть выполнено условие $P\Gamma^{-1} \leq 1$. Условия равновесия будут выполнены, если

$$\mathbf{T}_{\pi x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \psi_0 \cos \psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, равновесная конфигурация (5.43) существует только при $P = \Gamma$, что соответствует большим деформациям поперечного сдвига. Физического интереса конфигурация (5.43) не представляет, поскольку задание энергии деформации в виде (5.1) в этом случае становится, вероятно, сомнительным.

Обратимся теперь к анализу устойчивости равновесной конфигурации (5.42). Для этого наряду с (5.42) рассмотрим возмущенную конфигурацию

$$\tilde{u}(x) = u + u_1, \quad \tilde{w} = w_1(x), \quad \tilde{\psi} = \psi_1(x), \quad (5.46)$$

причем возмущения u_1, w_1, ψ_1 считаются бесконечно малыми. Подставляя (5.46) в (5.28), (5.29), (5.31) и линеаризуя получившиеся уравнения относительно u_1, w_1, ψ_1 , приходим к следующей системе уравнений:

$$u'_1 = 0, \quad \psi_1 = \frac{P + \Gamma(1 + u')}{\Gamma(1 + u')^2} w'_1 = 0, \quad \psi_1 + \frac{P}{C_1 + C_2} w_1 = 0, \quad (5.47)$$

где функция u' является решением уравнения (5.33) и, следовательно, постоянна. Исключая из последнего уравнения угол поворота ψ_1 , приходим к уравнению

$$w_1'' + \gamma^2 w_1 = 0, \quad \gamma^2 \equiv -\frac{P}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\Gamma(1 + u')^2}{P + \Gamma(1 + u')}. \quad (5.48)$$

Решения этого уравнения, обращающиеся на границах полосы в нуль, имеют вид

$$w_1 = A_n \cos \gamma_n x, \quad \gamma_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.49)$$

Отсюда видно, что при $P > 0$ уравнение (5.48) имеет только нулевые решения и бифуркация отсутствует. При $P < 0$, т. е. при сжатии полосы, бифуркация равновесия возможна. Наименьшее значение $|P|$, при котором возникает смежная равновесная конфигурация, называется критическим и обозначается через $P_{кр}$. Оно определяется из уравнения

$$\frac{P_{кр}}{(C_1 + C_2)} \cdot \frac{\Gamma(1 + u')^2}{-P_{кр} + \Gamma(1 + u')} = +\frac{\pi^2}{4l^2} \quad (5.50)$$

или в другом виде

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{(C_1 + C_2)}{4l^2} \frac{1 + u'}{1 + \frac{(C_1 + C_2)}{4l^2 \Gamma} \frac{\pi^2}{(1 + u')^2}}. \quad (5.51)$$

Правая часть этого уравнения содержит u' и, следовательно, содержит $P_{кр}$, поэтому (5.51) именно уравнение, а не формула для определения $P_{кр}$. Если деформация сжатия мала, то для $P_{кр}$ можно принять

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{(C_1 + C_2)}{4l^2} \frac{1}{1 + \frac{(C_1 + C_2)}{4l^2 \Gamma} \pi^2}. \quad (5.52)$$

Поскольку при сжатии u' отрицательна, то (5.52) дает завышенное значение для $P_{кр}$. Можно уточнить формулу (5.52), если воспользоваться (5.51), куда вместо u' подставить ее значение, соответствующее (5.52) и (5.42)

$$u'(x) = -\frac{\pi^2}{4} \frac{(C_1 + C_2)}{(A_1 + A_2)l^2} \cdot \frac{1}{11 + \frac{(C_1 + C_2)}{4l^2 \Gamma} \pi^2}. \quad (5.53)$$

5.4. Численные расчеты и сравнение с известными данными

Для проверки предложенной теории сравним полученные результаты с данными книги [7].

Примем, что внешние слои выполнены из дюралюминия Д-16Т с параметрами $E_2 = 6,96 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\nu_2 = 0,3$. Внутренний слой выполнен из различных сортов фенопласта ФК с коэффициентом Пуассона $\nu_1 = 0,4$ (приведено примерное значение). Во всех рассмотренных ниже случаях деформация сжатия u' была мала, порядка 0,1%, поэтому вычисление критической силы можно проводить по формуле (5.52). Вычисление модулей упругости производилось о методике, изложенной в п.5.1. Вычисление жесткости на поперечный сдвиг проводилось по трем вариантам: а) по формулам (5.7)–(5.9); б) по схеме параллельного включения слоев

$$\Gamma_* = \frac{\pi^2}{6} (G_1 h_1 + G_2 h_2), \quad (5.54)$$

в) по схеме последовательного включения слоев

$$\Gamma_{**} = \frac{\pi^2 G_1 h_1 G_2 h_2}{6 (4G_1 h_1 + G_2 h_2)}. \quad (5.55)$$

Если в формулу (5.52) вместо Γ подставим Γ_{**} , то получим оценку снизу для $P_{кр}$. Если же в (5.52) вместо Γ подставить Γ_* , то для $P_{кр}$ получим оценку сверху. Отметим, что принятие кинематических гипотез приводит к формуле (5.54). Как видно из табл. 5.1, использование Γ_* для вычисления критической нагрузки приводит к совершенно неудовлетворительным результатам. Именно это обстоятельство и стало причиной отказа от рассмотрения трехслойных оболочек по классическим схемам. Большинство известных вариантов теории многослойных оболочек основано на рассмотрении каждого слоя как тонкой оболочки с последующим сопряжением по слоям. Например, в теории трехслойных оболочек с мягким наполнителем внешние (жесткие) слои рассматривают как тонкие оболочки, а свойства наполнителя тем или иным способом учитывают в условиях сопряжения слоев. В этом случае получаем две связанные системы уравнений теории оболочек. Поэтому ее использование для практических расчетов значительно проще. Что же касается совпадения результатов, полученных на основе теории простых оболочек, с данными эксперимента, то оно в целом вполне удовлетворительно.

Таблица 5.1:

$P_{расч}$	P_*	$P_{эксп}$	P	P_{**}	Γ_*	Γ	Γ_{**}
кгс/см	кгс/см	кгс/см	кгс/см	кгс/см	кгс/см	кгс/см	кгс/см
68,99	72,11	73,91	85,02	173,9	122,52	165,12	22 140
260,9	226,1	234,8	277,8	476,1	427,1	658,7	53 271
48,70	39,04	46,81	49,22	423,8	42,92	55,55	20 060
63,77	71,82	82,61	88,87	424,1	86,12	111,87	22 103
95,07	100,0	115,4	123,3	648,2	117,6	151,16	22 135
113,0	128,8	150,7	157,1	648,7	159,6	205,31	22 178
148,4	141,6	158,0	172,3	649,0	180,3	232,2	22 200
64,32	72,12	69,35	95,6	640,5	81,12	112,1	44 115
75,38	61,97	79,15	82,75	663,5	68,25	94,11	44 102

Из табл. 5.1 видно, что экспериментальная критическая сила ниже, чем вычисленная по формуле (5.52), но выше, чем $P_{кр}^{**}$, вычисленная по формуле (5.52) с заменой Γ на Γ_{**} , т. е.

$$P_{кр}^{**} < P_{эксп.} < P_{кр} < P_{кр}^*, \quad (5.56)$$

где $P_{кр}^*$ найдено по (5.52) после замены Γ на Γ_* . Исключение составляет случай, приведенный в таблице под номером 8. Объяснить это исключение мы затрудняемся. Не исключено, что здесь имеется опечатка в исходных данных. Все исходные данные, а также $P_{эксп}$ и $P_{расч}$ взяты из книги [7]. Через a в таблице обозначена длина полосы, которая при расчете оказалась бесконечной. Величиной δ обозначена относительная ошибка, которая вычислялась по формуле

$$\delta = \frac{P_{расч} - P_{эксп}}{P_{эксп}} \cdot 100\%. \quad (5.57)$$

Примечание. Выше приведена таблица, в которой исключены значения параметров полосы и относительных погрешностей (параметры могут быть найдены в книге [7])

на стр. 154, табл. 15.13). Следует иметь в виду небольшое расхождение в обозначениях:

$$\delta(\Gamma) = \frac{P_{кр} - P_{экср}}{P_{экср}} \cdot 100 \%. \quad (5.58)$$

Аналогичны формулы для $\delta(\Gamma_*)$ и $\delta(\Gamma)_*$. Через μ в таблице обозначено отношение G_1/G_2 , а через α величина h_1/h , где $h = h_1 + h_2$.

На этом мы закончим рассмотрение трехслойных оболочек.

Замечание. В этой главе рассмотрена простейшая теория трехслойных оболочек, пригодная для описания только весьма тонких оболочек. При этом было показано, что ошибка в построении тензоров C_1 , C_3 , Γ имела порядок $O(h^2/R^2)$.

В теории многослойных оболочек, строго говоря, это обстоятельство может не иметь места. Причина в том, что нарушается аналитическая зависимость тензоров упругости от малого тензора $h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ и разложения вида 3.108, вообще говоря, могут не иметь места. Для справедливости этих разложений необходимо, чтобы жесткость “мягких” слоев на поперечное сжатие была бы достаточно велика.

Библиографический список

- [1] *Айнола Л.Я.* Об уточненных теориях пластинок типа Рейсснера // Тр. IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964. С. 171–177.
- [2] *Айнола Л.Я.* О расчетных моделях упругих пластинок для динамических задач // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1963. 12. №1. С. 31–37.
- [3] *Айнола Л.Я.* Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. 14. №3. С. 337–344.
- [4] *Айнола Л.Я.* О геометрически нелинейной теории динамики упругих пластинок // Прикл. мех. 1965. 1, вып. 3. С. 7–16.
- [5] *Айнола Л.Я., Нигул У.К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. 14. №1. С. 3–63.
- [6] *Аксентян О.К., Ворович И.И.* Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. 27. №6.
- [7] *Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М., Прусаков А.П.* Расчет трехслойных панелей. М.: Оборонгиз, 1960. 271 с.
- [8] *Александров А.Я., Вольперт В.С., Наумова М.П., Таланова Р.М., Трофимова Э.П.* Некоторые задачи расчета трехслойных панелей с заполнителями типа плотноупакованных конических оболочек и сот // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1969. С. 38–44.
- [9] *Александров А.Я., Куршин Л.М.* Многослойные пластины и оболочки // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1969.
- [10] *Алексеев С.А.* Задачи статики и динамики мягких оболочек // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966. С. 28–37.
- [11] *Амбарцумян С.А.* Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки // ДАН Арм ССР. 1948. 6. №5.
- [12] *Амбарцумян С.А.* К расчету двухслойных ортотропных оболочек // Изв. АН ССР. ОТН. 1957. №7.
- [13] *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
- [14] *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
- [15] *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С.* Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.

- [16] Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения / под ред. Дж.Б. Келлера, С. Антмана М.: Мир, 1974. 254 с.
- [17] *Антропова Н.Н., Гольденвейзер А.Л.* Погрешности построения основного напряженного состояния и простого краевого эффекта // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. 1971. № 5.
- [18] *Базаренко Н.А., Ворович И.И.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // ПММ. 1965. 29. № 6. С. 1035–1052.
- [19] *Баев Л.В., Чулков П.П.* К расчету слоистых пластин. Новосибирск. Изд-во СО АН СССР, 1969.
- [20] *Балабух Л.И.* Изгиб и кручение конических оболочек // Тр. ЦАГИ. 1946. № 577.
- [21] *Бартенев Г.М., Казанович Т.Н.* О законе высокоэластичных деформаций сетчатых полимеров. Высокомолекулярные соединения. 1960. 2. № 1, С. 20–27.
- [22] *Бердичевский Б.Л.* Вариационно-асимптотический метод // Некоторые проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ. 1978. С. 271–289.
- [23] *Бернштейн С.Н.* Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1966. 95 с.
- [24] *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
- [25] Прочность. Устойчивость. Колебания / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т. I. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
- [26] *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.
- [27] *Болотин В.В.* К теории слоистых плит // Изв. АН СССР. ОТН. 1963. № 3.
- [28] *Болотин В.В.* Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев // Изв. АН СССР. 1964. № 1.
- [29] *Болотин В.В.* О теории армированных тел // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1.
- [30] *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
- [31] *Бохер М.* Введение в высшую алгебру / ГТТИ. 1933. С. 124–127.
- [32] *Валмишвилли Н.М.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
- [33] *Векуа И.Н.* Об одном способе расчета призматических оболочек // Тр. Тбилисского матем. ин-та. 1955. 21.
- [34] *Векуа И.Н.* Теория тонких оболочек переменной толщины // Тр. Тбилисского матем. ин-та. 1965. 30.

- [35] *Векуа И.Н.* О двух путях построения непротиворечивой теории упругих оболочек // *Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин.* Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1975.
- [36] *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 285 с.
- [37] *Власов В.З.* Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек // *ПММ.* 1944. 8, вып. 2. С. 109–140.
- [38] *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
- [39] *Вольмир А.С., Кильдибеков И.Г.* Гибкие пластины и мембраны // *Прочн-гсть. Устойчивость. Колебания.* В 3-х т. под общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко.
- [40] *Ворович И.И.* Общие проблемы теории пластин и оболочек // *Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.* М.: Наука, 1966.
- [41] *Ворович И.И., Малкина О.С.* Напряженное состояние толстой плиты // *ПММ.* 1967. 31, вып. 2. С. 230–241.
- [42] *Ворович И.И., Кадомцев И.Г.* Качественное исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойной плиты // *ПММ.* 1970. 34, вып. 5. С. 870–876.
- [43] *Ворович И.И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // *Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин.* Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1975.
- [44] *Ворович И.И.* Неединственность и устойчивость в нелинейной механике сплошной среды // *Нерешенные задачи механики и прикладной математики.* М.: Изд. МГУ, 1977. С. 10–47.
- [45] *Галимов К.З.* Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях // *Изв. Каз. филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук.* 1950. № 2.
- [46] *Галимов К.З.* К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях // *ПММ.* 1951. 15, вып. 6.
- [47] *Галинъш А.К.* Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // *Исследования по теории пластин и оболочек.* Сб. 5. Казань: Изд. Казанского ун-та. 1967. С. 66–92.
- [48] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
- [49] *Гольденвейзер А.Л.* Дополнения и поправки к теории тонких оболочек Лява // *Пластинки и оболочки.* Под ред. А.А. Гвоздева. М.: Госстройиздат, 1939. С. 85–105.
- [50] *Гольденвейзер А.Л.* Уравнения теории тонких оболочек // *ПММ.* 1940. 4, вып. 2, С. 35–42.
- [51] *Гольденвейзер А.Л.* Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки // *ПММ.* 1945. 91, вып. 6. С. 463–478.

- [52] *Гольденвейзер А.Л., Лурье А.И.* О математической теории равновесия упругих оболочек // ПММ. 1947. II, вып. 5. С. 565–592.
- [53] *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953. 544 с.
- [54] *Гольденвейзер А.Л.* Развитие теории упругих тонких оболочек // Тр. I Всесоюз. съезда по теории и прикладной механике / АН СССР, 1962.
- [55] *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. 26, вып. 4.
- [56] *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. 27, вып. 4.
- [57] *Гольденвейзер А.Л.* Методы обоснования и уточнения теории оболочек. Обзор последних результатов // ПММ. 1968. 32, вып. 4.
- [58] *Гольденвейзер А.Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1968.
- [59] *Гольденвейзер А.Л.* Асимптотический метод построения теории оболочек // Материалы I Всесоюз. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1975. С. 151–213.
- [60] *Гольденвейзер А.Л.* Теории тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
- [61] *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
- [62] *Григолюк Э.И.* Уравнения трехслойных оболочек с мягким наполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 1.
- [63] *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Теория вязко-упругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных перемещениях // ПМТФ. 1964. № 5.
- [64] *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 1.
- [65] *Григолюк Э.И., Корнев В.М.* К формулировке уравнений трехслойных пластин и оболочек // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971.
- [66] *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* К формулировке уравнений трехслойных пластин и оболочек // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971.
- [67] *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т.5, М., 1973. 272 с.
- [68] *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 59 с.
- [69] *Гурвич Е.Л.* Условия Адамара в нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1.
- [70] *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. ГТИИ. 1948.

- [71] *Гусейн-Заде М.И.* К построению теории изгиба слоистых пластин // ПММ. 1968. 32, вып. 2.
- [72] *Гусейн-Заде М.И.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки // ПММ. 1974. 38, вып. 6. С. 1072–1078.
- [73] *Дубнов Я.С.* Основы векторного исчисления // ГИТТЛ. Т.1. 1950. Т. 2. 1952.
- [74] *Елисеев В.В., Жилин П.А., Пальмов В.А., Спирченко Ю.В., Чвартацкий Р.В.* О стержневом методе расчета прочности и жесткости Токамак. Препринт ЛМ-0402, Л.: НИИЭФА, 1978.
- [75] *Елисеев В.В., Жилин П.А., Пальмов В.А., Спирченко Ю.В., Чвартацкий Р.В.* Алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния наружной камеры термоядерного реактора. Препринт ЛМ-0403, Л.: НИИЭФА, 1978.
- [76] *Жилин П.А.* Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 5. С. 139–142.
- [77] *Жилин П.А., Кизима Г.А.* Оболочки нулевой гауссовой кривизны с меридиональными ребрами // Прочность гидротурбин: Тр. ЦКТИ. 1966. № 72. С. 41–52.
- [78] *Жилин П.А.* К анализу краевых задач для ребристых оболочек // Прочность гидротурбин: Тр. ЦКТИ. 1966. № 72. С. 26–40.
- [79] *Жилин П.А.* Общая теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 6.
- [80] *Жилин П.А., Кизима Г.А.* Оболочка нулевой гауссовой кривизны // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 3.
- [81] *Жилин П.А.* Теория ребристых оболочек и ее приложения // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 5.
- [82] *Жилин П.А.* Общая теория ребристых оболочек // Прочность гидротурбин: Тр. ЦКТИ. 1968, вып. 88. С. 46–70.
- [83] *Жилин П.А., Михеев В.И.* Торообразная оболочка с меридиональными ребрами для расчета спиральных камер гидротурбин // Прочность гидротурбин: Тр. ЦКТИ. 1968, вып. 88. С. 91–99.
- [84] *Жилин П.А., Заруцкий В.А.* Обзор основных проблем теории ребристых оболочек // Третий Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. мех. М., 1968.
- [85] *Жилин П.А., Кизима Г.А.* Сферический пояс с меридиональными ребрами // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 5.
- [86] *Жилин П.А.* Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 150–162.
- [87] *Жилин П.А.* Двумерная деформируемая среда. Математическая теория и физические интерпретации // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6.
- [88] *Жилин П.А.* Современная трактовка теории оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 4.

- [89] *Zhilin P.A.* Mechanics of Deformable Cosserat Surfaces. — The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Report № 89, 1975. P. 1–29.
- [90] *Zhilin P.A.* Mechanics of Deformable Cosserat Surfaces and Shell Theory. — The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Annual report, 1975. P. 54.
- [91] *Жилин П.А.* Механика деформируемых оснащенных поверхностей // Тр. IX Всесоюз. крнф. по теории оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1975. С. 48–54.
- [92] *Zhilin P.A.* Mechanics of Deformable Cosserat Surfaces // Int.J.Solids Structures. 1976. 12. P. 635–648.
- [93] *Жилин П.А.* общая теория определяющих уравнений в линейной теории упругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 190.
- [94] *Жилин П.А.* Новый метод построения теории тонких упругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. С. 191.
- [95] *Жилин П.А., Ильичева Т.П.* Спектры и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда, полученные на основе трехмерной теории упругости и теории пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 94–103.
- [96] *Жилин П.А.* Об устойчивости упругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 173.
- [97] *Altenbach H., Zhilin P.A.* Ermittlung der Steifigkeits-beziehungen für Dreischichtschalen. — Schiffabautechnisches Symp. Schiffsfestigkeit und Schiffsschwingungen, Heft 2, Rostok, DDR. 1980. S. 63–71.
- [98] *Жилин П.А.* Теория упругих простых оболочек // Пятый Всесоюз. съезд по теор. и прикл. мех. Алма-Ата. Наука, 1981. С. 153.
- [99] *Жилин П.А., Ильичева Т.П.* Сосредоточенное воздействие на шарнирно-опертую плиту. Деп. ВИНТИ № 4037–81. Деп. С. 1–15.
- [100] *Altenbach H., Zhilin P.A.* Eine nichtlineare Theorie dünner Dreischichtschalen und ihre Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung eines dreischichtigen Streifens. — Technische Mechanik, 1982, 3. № 2. S. 23–30.
- [101] *Жилин П.А.* Основные уравнения неклассической теории оболочек // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. № 386. 1982. С. 29–46.
- [102] *Альтенбах Х., Жилин П.А.* Бифуркация равновесия трехслойной полосы // Труды ЛПИ, № 386. 1982. С. 88–93.
- [103] *Жилин П.А.* Осесимметричный изгиб гибкой круглой пластинки при больших перемещениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 138–144.
- [104] *Жилин П.А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 275 с.
- [105] *Зверьев Е.М.* О соотношениях упругости в линейной теории тонких упругих оболочек // ПММ. 1970. 34, вып. 6. С. 1136–1138.

- [106] *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. 35, вып. 3. С. 406–410.
- [107] *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную // ПММ. 1971. 35, вып. 5. С. 848–852.
- [108] *Зубов Л.М.* Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек // ПММ. 1976. 40, вып. 1, С. 85–95.
- [109] *Зубов Л.М.* Уравнения упругих оболочек в эйлеровых координатах // ДАН СССР. 1977. 237, № 5. С. 1044–1047.
- [110] *Ивенс Г.И. Скейлаж Э.* Механика и термодинамика биологических мембран. М.: Мир, 1982. 304 с.
- [111] *Ишлинский А.Ю.* Некоторые применения статики к описанию законов деформирования тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1944. № 9.
- [112] *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. М.: Гостехиздат. Т. 1, 1947; Т.2, 1948.
- [113] *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1960. 307 с.
- [114] *Картан Э.* Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1963. 367 с.
- [115] *Кильчевский Н.А.* Обобщение современной теории оболочек // ПММ. 1942. 6, вып. 2–3. — с. 153–167.
- [116] *Кильчевский Н.А.* Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 354 с.
- [117] *Кирпичев В.Л.* Беседы о механике. С.-Петербург, 1907. 371 с.
- [118] *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
- [119] *Колос А.В.* Об области применимости приближенных теорий изгиба пластин типа Рейсснера // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. М.: Наука, 1966.
- [120] *Королев В.И.* Тонкие двухслойные пластины и оболочки // Инж. сб. Т. XXII. 1954.
- [121] *Королев В.И.* К расчету подкрепленных пластин и оболочек // Инж. сб. Т. XXVI. 1958.
- [122] *Королев В.И.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.
- [123] *Курант Э.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [124] *Куришин Л.М.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек // Расчет пространственных конструкций, вып. 7. М.: Госстройиздат, 1962. С. 163–192.
- [125] *Лагалли. М.* Векторное исчисление // ОНТИ, 1937. 343 с.
- [126] *Нелинейные волны /* Под ред. Лейбович С., Сибасс А. М.: Мир, 1977. 319 с.

- [127] *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. 27, вып. 3. С. 393–417.
- [128] *Лурье А.И.* Исследования по теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. индустр. ин-та. 1937. 6, вып. 3. С. 37–59.
- [129] *Лурье А.И.* Общая теория упругих тонких оболочек // ПММ. 1940. 4, вып. 2. С. 7–34.
- [130] *Лурье А.И.* Равновесие упругой симметрично-нагруженной сферической оболочки // ПММ. 1943. 7, № 6. С. 393–404.
- [131] *Лурье А.И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
- [132] *Лурье А.И.* Об уравнениях общей теории упругих оболочек // ПММ. 1950. 14, вып. 5.
- [133] *Лурье А.И.* О статико–геометрической аналогии в теории оболочек // Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961. с. 233–240.
- [134] *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
- [135] *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
- [136] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [137] *Ляв А.* Математическая теория упругости / ОНТИ. 1935. 674 с.
- [138] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
- [139] *Морозов Н.Ф.* К нелинейной теории тонких пластин // ДАН СССР. 1957. 114 № 5, с. 968–971.
- [140] *Морозов Н.Ф.* Качественное исследование мембранного решения // Труды IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964. с. 702–705.
- [141] *Морозов Н.Ф., Срубцик Л.С.* Применение метода Чаплыгина к исследованию уравнения мембраны // Диф. уравнения. 1966. 2, № 3. С. 425–427.
- [142] *Морозов Н.Ф.* О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения // ДАН СССР. 1967. 176, № 3. С. 522–525.
- [143] *Муштариди Х.М.* Некоторые обобщения теории тонких оболочек // ПММ. 1939. 2, вып. 4. С. 439–456.
- [144] *Муштариди Х.М.* Об области применимости приближенной теории Кирхгофа–Лява // ПММ. 1947. II, вып. 5. С. 517–520.
- [145] *Муштариди Х.М., Терегулов И.Г.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Тат. кн. изд-во, 1959. 433 с.
- [146] *Муштариди Х.М., Терегулов И.Г.* К теории оболочек средней толщины // ДАН СССР. 128, 3 6.
- [147] *Муштариди Х.М., Терегулов И.Г.* Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины // Изв. АН СССР. ОТН. 1969. № 6.

- [148] *Нахди П.М.* Обзор современного прогресса в теории упругих оболочек // *Механика: Сб. переводов ин. ст.* 1959. № 1.
- [149] *Нахди П.М.* О теории тонких упругих оболочек. // *Механика: Сб. переводов ин. ст.* 1959. № 2.
- [150] *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. М.: Мир, 1967. 386 с.
- [151] *Низул У.К.* Линейные уравнения динамики круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез // *Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А*, 1960. С. 1–68.
- [152] *Низул У.К.* Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек. — *ПММ*, 1962, 62, вып. 5, с. 923–930.
- [153] *Низул У.К.* Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек и анализ точности различных вариантов теории Кирхгофа–Лява // *Тр. IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин.* Ереван, 1964. С. 738–742.
- [154] *Новожилов В.В.* О погрешности одной из гипотез теории оболочек // *ДАН СССР*. 33, № 5-6, 1943.
- [155] *Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М.* О погрешности гипотез Кирхгофа–Лява в теории оболочек // *ПММ*. 1943. 7, вып. 5. С. 323–330.
- [156] *Новожилов В.В.* Новый метод расчета оболочек // *Изв. АН СССР. ОТН*. 1946. № 1. С. 35-48.
- [157] *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
- [158] *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: 1958. 369 с.
- [159] *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судопромгиз, 1962. 432 с.
- [160] *Новожилов В.В., Черных К.Ф.* К расчету оболочек на сосредоточенные воздействия // *Исследования по теории упругости и пластичности*. 2, М.: Изд-во Моск. ун-та. 1963.
- [161] *Новожилов В.В., Толоконников Л.А., Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости // *Механика в СССР за 50 лет*. Т.3, М., 1972. С. 71–73.
- [162] *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1969. 695 с.
- [163] *Пальмов В.А.* Об одной модели среды сложной структуры // *ПММ*. 1969. 33, вып. 4. С. 768–773.
- [164] *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. Л.: Наука, 1976. 328 с.
- [165] *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. Л.-М.: ГИТТЛ. 1953. 360 с.
- [166] *Погорелов А.В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М.: Наука, 1967. 280 с.
- [167] *Погребысский И.Б.* От Лагранжа к Эйнштейну. М.: Наука, 1966. 327 с.
- [168] *Пономарев С.Д., Андреева Л.Е.* Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. 326 с.

- [169] *Понятовский В.В.* К теории пластин средней толщины // ПММ. 1962. 26, вып. 2.
- [170] *Попов Е.П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.-М.: ГИТТЛ, 1948. 170 с.
- [171] *Работнов Ю.Н.* Основные уравнения теории оболочек // ДАН СССР. 1945. 47, № 5.
- [172] *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
- [173] *Седов Л.И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук. 1965. 20, вып. 5.
- [174] *Рогачева Н.Н.* О соотношениях упругости Рейсснера–Нахди // ПММ. 1974. 38, вып. 6. С. 1063–1071.
- [175] *Седов Л.И.* Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы // ПММ. 1968. 32, вып. 5.
- [176] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.
- [177] *Седов Л.И.* Новые методы и новые направления механики сплошной среды. — В сб.: Нерешенные задачи в механике и прикладной математики. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1977. С. 125–139.
- [178] *Сен–Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 с.
- [179] *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
- [180] *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
- [181] *Схоутен А.Я.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
- [182] *Терегулов И.Г.* К построению уточненных теорий пластин и оболочек // ПММ. 1962. 26, вып.2.
- [183] *Терегулов И.Г.* Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. М.: Наука, 1969. 206 с.
- [184] *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.
- [185] *Товстик П.Е.* К вопросу об устойчивости цилиндрической оболочки при кручении // ПММ. 1980. 16, № 9. С. 132–134.
- [186] *Трусделл К.* Нерешенная главная задача нелинейной теории упругости // Механика: Сб. переводов ин.ст. 1957. № 1. С. 67–74.
- [187] *Трусделл К.* Этапы развития понятия напряжения // Проблемы механики сплошной среды. АН СССР. М.: 1961. С. 439–447.
- [188] *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [189] *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
- [190] *Флюгге В.* Статика и динамика оболочек. М.: Госстройиздат, 1961. 306 с.
- [191] *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 191 с.

- [192] Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. Л.: Наука, 1968. 456 с.
- [193] Чернина В.С. Свободные колебания тонкой замкнутой сферической оболочки // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973. С. 575–579.
- [194] Черных К.Ф. О сопряженных задачах теории тонких оболочек // ДАН СССР. 1957. 117, № 6.
- [195] Черных К.Ф. О вариационном принципе комплексной теории оболочек // ПММ. 1958. 22, № 2.
- [196] Черных К.Ф. Сопряженные задачи теории тонких оболочек // Проблемы механики сплошных сред (К семидесятилетию акад. Н.И.Мусхелишвили): Изв. АН СССР. М., 1961. С. 499–503.
- [197] Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Часть 1. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. 274 с.
- [198] Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Часть 2. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1964. 395 с.
- [199] Черных К.Ф. Простой краевой эффект и расчленение граничных условий в линейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. ОТН. Сер. мех. и машиностр. 1964. № 5.
- [200] Черных К.Ф. Напряжения и деформации в оболочках // Прочность. Устойчивость. Колебания: в 3-х т. под общ. ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. С. 629–812.
- [201] Черных К.Ф. Основные зависимости нелинейной теории упругости // Актуальные проблемы нелинейной механики сплошных сред. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. С. 52–67.
- [202] Черных К.Ф., Шубина И.М. Обобщение упругого потенциала Бартенева–Хазановича // Актуальные проблемы нелинейной механики сплошных сред. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. С. 14–19.
- [203] Шиманский Ю.А. Строительная механика подводных лодок. М.: Гос. изд. судостр. лит., 1948. 230 с.
- [204] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947. 359 с.
- [205] Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи. М.–Л.: ГТТЛ, 1934. 600 с.
- [206] Эриксен Дж. Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир, 1977. 246 с.
- [207] Antman S.S. Existence and nonuniqueness of axisymmetric equilibrium states of nonlinearly elastic shell // Arch. Rat. Mech. Anal. 1971. 40. P. 329–372.
- [208] Aron H. Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dunnen, beliebig gekrummten elastischen Shale // J. Reine und Angew. Math. 1874. 78. P. 136–173.
- [209] Balaban M.M., Green A.E., Naghdi P.M. Simple force multipoles in the theory of Deformable Surfaces // J. Math. Phys. 1967. 8. P. 1026–1036.

- [210] *Ball J.M.* Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity // Arch. Rational Mech. and Anal. 1977. 63. № 4. P. 337–403.
- [211] *Basset A.B.* On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells // Phil Trans. Roy. Soc. London, 1891. Ser. A 181. P. 430–480.
- [212] *Bryan G.H.* *Stability in Aviation*. London, 1911. 192 p.
- [213] *Budinsky B. and Sander J.L.* On the "best" first order linear shell theory. — Progress in applied mechanics (The Prager Anniv. Vol.). MacMillan Cop. 1963. P. 129–140.
- [214] *Cohen H., De Silva C.N.* Nonlinear theory of elastic surfaces // J. Math. Phys. 1966. 7. P. 246–253.
- [215] *Cohen H., De Silva C.N.* Theory of Directed Surfaces // J. Math. Phys. 1966. 7. P. 960–966.
- [216] *Cohen H., De Silva C.N.* On a nonlinear theory of elastic shells // J. Mechanique. 1968. 7. P. 459–464.
- [217] *Cohen H., Sun S.L.* Wave propagation in elastic surfaces // J. Math. Phys. 1970. 19. P. 1117–1129.
- [218] *Cosserat E. et F.* *Theorie des Corps Deformables*. Paris, 1909.
- [219] *Ericson J.L. and Truesdell C.* Exact theory of stress and strain in rods and shells // Arch. Rat. Mech. Anal. 1958. 1. P. 259–323.
- [220] *Ericson J.L.* Uniformity in shells // Arch Rat. Mech. Anal. 1967. 37. P. 73–84.
- [221] *Ericson J.L.* Wave propagation in thin elastic shells // Arch. Rat. Mech. Anal. 1971. 43. P. 167–178.
- [222] *Ericson J.L.* The simplest problems for an elastic Cosserat surface // J. Elasticity. 1973. 2. P. 101–107.
- [223] *Ericson J.L.* Theory of micropolar plates // Z. Angew. Math. Phys. 1967. 16. P. 12–30.
- [224] *Friedrichs K.O.* Kirchhof's boundary conditions and the edge effect for elastic plates // Proc. Symp. Appl. Math. 1950. 3. P. 117–124.
- [225] *Friedrichs K.O. and Dressler R.F.* A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure Appl. Math. 1961. 14. P. 1–33.
- [226] *Green A.E.* On Reissner's theory of bending of elastic plates // Quart. Appl. Math. 1949. 7. P. 223–228.
- [227] *Green A.E.* On the linear theory of thin elastic shells // Proc. Roy. Soc. London, 1962. Ser. A 266. P. 143–160.
- [228] *Green A.E.* Boundary-layer equations in the theory of thin elastic shells // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 269. P. 481–491.
- [229] *Green A.E., Naghdi P.M., Rivlin R.S.* Directors and multipolar displacements in continuum mechanics // Int. J. Eng. Sci. 1965. 2. P. 611–620.

- [230] *Green A.E., Naghdi P.M., Wainwright W.L.* A general theory of Cosserat surfaces // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. 20. P. 287–308.
- [231] *Green A.E., Naghdi P.M.* The linear theory of an elastic Cosserat plate // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. 63. P. 537–550.
- [232] *Green A.E., Naghdi P.M.* Micropolar and director theories of plate // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1965. 20. P. 183–199.
- [233] *Green A.E., Law N., Naghdi P.M.* Rods, plates and shells // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. 64. P. 895–913.
- [234] *Green A.E., Naghdi P.M.* The linear elastic Cosserat surface and shell theory // Int. J. Solid Structures. 1968. 4. P. 585–592.
- [235] *Green A.E., Naghdi P.M.* The Cosserat Surface // Proc. IUTAM Symp. on mechanics of generalized continua (Freudenstadt and Stuttgart, 1967). 1968. P. 36–48.
- [236] *Green A.E., Naghdi P.M., Osborn R.B.* Theory of an elastic–plastic Cosserat surface // Int. J. Solid Structures. 1968. 4. P. 907–927.
- [237] *Green A.E., Naghdi P.M.* Shells in the light of generalized continua // Proc. 2-nd IUTAM Symp. on the theory of thin shells (Copenhagen, 1967). Springer–Verlag, 1969. P. 39–58.
- [238] *Green A.E., Naghdi P.M.* Non–isothermal theory of rods, plates and shells // Int. J. Solid Structures. 1970. 6. P. 209–244.
- [239] *Green A.E., Naghdi P.M.* On uniqueness in the linear theory of elastic shells and plates // J. Mechanique. 1971. 10. P. 251–261.
- [240] *Green A.E., Naghdi P.M.* On superposed small deformation of an elastic Cosserat surface // J. Elasticity. 1971. 1. P. 1–17.
- [241] *Green A.E., Naghdi P.M., Weener M.L.* Linear theory of Cosserat surfaces and elastic plates of variable thickness // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1971. 69. P. 227–254.
- [242] *Gunter W.* Analoge systeme von Schalengleichungen // Ing. Arch. 1961. 30. P. 160–186.
- [243] *Gurtin M.E., Murdoch A.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rat. Mech. Anal. 1975. 57. P. 291–323.
- [244] *John F.* Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations // Comm. Pure and Appl. Math. 1965. 18. P. 235–267.
- [245] *John F.* Refined interior shell equations // Proc. 2-nd IUTAM Symp. on the theory of thin shells (Copenhagen, 1967). Springer–Verlag, 1969. P. 1–14.
- [246] *John F.* Refined interior equations for thin elastic shells // Comm. Pure and Appl. Math. 1971. 24. P. 583–613.
- [247] *Koiter W.T.* A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells // Proc. IUTAM Symp. on the theory of thin elastic shells (Delft, 1959). North – Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960. P. 12–33.
- [248] *Koiter W.T.* A systematic simplification of the general equations in the linear theory of thin shells // Proc. Koninkl. Ned. Acad. Wetenschap. 1961. Ser. B 64. P. 612–619.

- [249] *Koiter W.T.* On the dynamic Boundary Conditions in the theory of thin shells // Proc. Koninkl. Ned. Acad. Wetenscap. 1964. Ser. B 67. P. 117–126.
- [250] *Koiter W.T.* On the nonlinear theory of thin elastic shells // Proc. Koninkl. Ned. Acad. Wetenscap. 1966. Ser. B 69. P. 1–54.
- [251] *Koiter W.T.* Foundations and basic equations of shell theory. A survey of recent progress // Proc. 2-nd IUTAM Symp. on the theory of thin shells. (Copenhagen, 1967). Springer – Verlag, 1969. P. 93–105.
- [252] *Koiter W.T.* On the foundations of the linear theory thin shells // Proc. Koninkl. Ned. Acad. Wetenscap. 1970. Ser. B 73. P. 169–195.
- [253] *Koiter W.T.* On the mathematical foundation of shell theory // Proc. Int. Congr. Math. (Nice, 1970), Gauthier – Villars, Paris, 1971. Vol. 3. P. 123–130.
- [254] *Koiter W.T.* A comparison between John's refined interior shell equations and classical shell theory // Z.A.M.P. 1969. 20. P. 642–653.
- [255] *Koiter W.T., Simmonds J.G.* Foundation of shell theory // Proc. 130th IUTAM Symp. Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New-York, 1973.
- [256] *Lamb H.* On the deformation of an elastic shell // Proc. London Math. Soc. 1891. 21. P. 119.
- [257] *Love A.E.H.* The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1888. Ser. A 179. P. 491–546.
- [258] *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. V. II. Cambridge, 1893. 327 p.
- [259] *Mindlin R.D.* influence of rotatory inertia and shear on flexural vibrations of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. 18. P. 31–38.
- [260] *Mindlin R.D.* Thicknessshear and flexural vibrations crystal plates // J. Appl. Phys. 1951. 22. P. 316–323.
- [261] *Mindlin R.D.* Waves and vibrations in isotropic, elastic plates // Proc. First Symp. on Naval Structural Mech. (Stanford, Calif., 1958). 1960. P. 199–232.
- [262] *Mindlin R.D.* High frequency vibrations of plates // Progress in Appl. Mech. (The Prager Anniv. Vol.) 1963. P. 73–84.
- [263] *Naghdi P.M.* On the theory of thin elastic shells // Quart. Appl. Math. 1957. 14. P. 369–380.
- [264] *Naghdi P.M.* Foundations of elastic shell theory // Progress in solid mech. 1963. 4. P. 1–90.
- [265] *Naghdi P.M.* A new derivation of the general equations of elastic shells // Int. J. Engng. Sci. 1963. 1. P. 509–522.
- [266] *Naghdi P.M.* On the nonlinear thermoelastic theory of shells // Proc. IASS Symp. on non-classical shell problems (Warsaw, 1963). 1964. P. 5–26.
- [267] *Naghdi P.M.* On a varyational theorem in elasticity and its applications to shell theory // J. Appl. Mech. 1964. 31. P. 647–653.

- [268] *Naghdi P.M.* A theory of deformable surface and elastic shell theory // Proc. Symp. on the theory of shells to honor L.H.Donnel (Houston, 1966). 1967. P. 25–43.
- [269] *Naghdi P.M.* The theory of Shells and Plates // Flugge's Handbuch der Physic. Bd. VI – 2. Springer – Verlag, 1972. P. 425–640.
- [270] *Niordson F.I.* A note on the Strain Energy of Elastic shells // Int. J. Solid Structures. 1971. 7. P. 1573–1579.
- [271] *Niordson F.I.* A consistent Refined Shell Theory. Report of Danish Center for Applied Math. and Mech. № 104. May 1976. P. 1–17, Denmark.
- [272] *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. Phys. 1944. 23. P. 184–191.
- [273] *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. 12. A. P. 69–77.
- [274] *Reissner E.* Varyational considerations for elastic beams and shells // J. Eng. Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Eng. 1962. 88. EMI. P. 23–57.
- [275] *Reissner E.* On the foundations of the theory of elastic shell // Proc. ii Int. Congress of Appl. Mech. Munich, 1964. Springer – Verlag, 1964. P. 20–30.
- [276] *Reissner E.* A note on stress Functions and compatibility equations in shell theory // Topics in Appl. Mech. Memorial volume to the prof. E. Schwerin. Amsterdam, 1965.
- [277] *Reissner E.* On the foundations of Generalized linear shell theory (Copenhagen, 1967). Berlin – Heidelberg – New York, 1969. P. 15–30.
- [278] *Reissner E.* On consistent first approximations in the general theory of thin elastic shells // Ing. Arch. 1971. 40. P. 402–419.
- [279] *Reissner E.* On sandwich-type plates with cores capable of supporting moment stresses // Acta Mechanica. 1972. 14. P. 43–51.
- [280] *Reissner E.* Linear and Nonlinear Theory of Shells // Thin-shell structures: theory, experimenyand Design, Prentice – Hall i nc., 1974. P. 29–44.
- [281] *Reissner E.* On the theory of transverse bending of elastic plates // Int. J. Solids Structures. 1976. 12. P. 545–554.
- [282] *Sanders J.L.* Nonlinear theories for thin shells // Quart. Appl. Math. 1963. 21. P. 21–36.
- [283] *Sanders J.L.* Nonlinear theories for thin shells // Quart. Appl. Math. 1963. 21. P. 21–36.
- [284] *Serwin H.* Quadratic invariants of surface deformation and the strain energy of thin elastic shells // J. Math. Phys. 1963. 4. P. 838–851.
- [285] *Simmonds J.G., Danielson D.A.* Nonlinear shell theory with finite rotation vector // Proc. Kon. Ned. Wet. 1970. B 73. P. 460–478.
- [286] *Simmonds J.G., Danielson D.A.* Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectofs // J. Appl. Mech. 1972. 39. P. 1085–1090.

- [287] *Lord Kelvin (Sir w. Thomson) and P.G. Tait.* Treatise on Natural Philosophy. Part.II. Cambridge, 1903. 527 p.
- [288] *Truesdell C.* History of Classical Mechanics // Naturwissenschaften, Springer – Verlag, 1976. 63. Part. I, p. 53–62; Part. II, p. 119–130.
- [289] *Wang C.C.* On the response fuctions of isotropic elastic shells // Arch. Rat. Mech. Annal., 1973. 50. P. 81–98.
- [290] *Zerna W.* Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen // Z. Angew. Math. Mech. 1962. 42. P. 333–341.

Оглавление

Введение	3
1. Краткий исторический обзор	6
1.1. Ранний период становления механики сплошной среды	6
1.2. Построение теории упругости и рождение теории оболочек	10
1.3. Развитие классической теории оболочек	12
1.4. О прямых подходах к построению теории оболочек	14
1.5. Неклассические теории оболочек	16
2. Общая теория простых оболочек	17
2.1. Определение простой оболочки	17
2.2. Обозначения векторных и тензорных величин	18
2.3. Кинематика простых оболочек	21
2.4. Энергия, количество движения и кинетический момент	23
2.5. Тензоры усилий и моментов. Уравнения движения	25
2.6. Тензоры усилий и моментов Пиола–Кирхгофа	29
2.7. Уравнение баланса энергии и тензоры деформации	31
2.8. Тензоры и меры деформации простой оболочки	33
2.9. Приведенные неравенства диссипации энергии	35
2.10. Определяющие уравнения термоупругих оболочек	36
2.11. Уравнения распространения тепла	38
2.12. О задании свободной энергии	39
2.13. Переход к теории типа Лява	43
2.14. Изгиб напряженной мембраны распределенным нормальным давлением	44
2.15. Изгиб круглой пластинки при больших перемещениях	50
2.16. Задача о выворачивании сферического купола	54
3. Теория термоупругих оболочек постоянной толщины	61
3.1. Линеаризация основных уравнений	61
3.2. Смысл векторов смещения и поворотов в простой оболочке	63
3.3. Альтернативный вывод уравнений движения	64
3.4. Уравнение баланса энергии	67
3.5. Определяющие уравнения в линейной теории оболочек	68
3.6. Энергия деформации простой оболочки	70
3.7. Типы тензоров и их группы симметрии	71
3.8. Группа симметрии простой оболочки. Принцип Кюри	74
3.9. Тензорные базисы на касательной плоскости	77
3.10. Ортотропные оболочки — предварительные результаты	79

3.11. Структура тензоров упругости	80
3.12. Структура тензоров упругости — продолжение	83
3.13. Тензоры “начальных” напряжений	83
3.14. Уравнения неразрывности	85
3.15. Определение тензора напряжений	86
3.16. Основные соотношения в линиях главной кривизны	88
3.17. Простейшая теория оболочек	91
3.18. Частоты и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда	92
3.19. Определение главных модулей упругости	98
3.20. Теория “толстых” однослойных оболочек	102
3.21. Положительность энергии деформации	103
3.22. Описание простого краевого эффекта	105
3.23. Действие сосредоточенной силы	110
3.24. Сравнение с некоторыми вариантами теории оболочек	114
3.25. Теоремы взаимности, Клапейрона и единственности	118
3.26. Сильная эллиптичность уравнений равновесия	121
3.27. Краевые условия и вариационные принципы	125
4. Теория двухслойных оболочек	127
4.1. Основные соотношения теории двухслойных оболочек	127
4.2. Определение “плоских” модулей упругости	130
4.3. Определение модулей поперечного сдвига	134
5. Теория тонких трехслойных оболочек симметричного строения	140
5.1. Исходные соотношения	140
5.2. Постановка задачи об устойчивости трехслойной полосы при сжатии	142
5.3. Разрешающие уравнения и определение критической нагрузки	143
5.4. Численные расчеты и сравнение с известными данными	146
Библиографический список	149

ЖИЛИН Павел Андреевич

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Основы теории оболочек

Учебное пособие

Редактор *Е. А. Пряникова*

Технический редактор *А. И. Колодяжная*

Оригинал-макет подготовлен автором

Директор Издательства Политехнического университета *А. В. Иванов*

Свод. темплан 2005 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93, т. 2; 953005 — учебная литература

Подписано в печать

Усл. печ. л. 13,5

Уч. - изд. л. 13,5

Формат 70×100/16.

Тираж 200.

Заказ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.

Издательство Политехнического университета,

член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.

Адрес университета и издательства:

195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.