Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

П. А. Жилин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

П. А. Жилин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2007

УДК 539.3 (075.8)
ББК 22.251я73
Ж 721

Жилин П. А. **Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней:** Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 101 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины ОПД.Ф.10 “Механика деформируемого твердого тела” подготовки магистров по направлению 510000 “Естественные науки и математика”, специальности 510300 “Механика” и 511300 “Механика. Прикладная математика и механика”.

В пособии рассмотрена динамическая теория тонких пространственно-изогнутых и естественно закрученных стержней. Предлагаемая теория включает в себя все известные варианты теории стержней, но обладает более широкой областью применимости. Предложен новый метод построения тензоров упругости, установлена их структура. Используется новая теория симметрии тензоров, определенных в пространстве с двумя независимыми ориентациями. Для плоских упругих кривых найдены все модули упругости. Значительное внимание уделено анализу ряда классических задач, включая те из них, решение которых ведет к парадоксальным результатам.

Предназначено для студентов, изучающих физико-математические и технические специальности, а также аспирантов и преподавателей, деятельность которых связана с вопросами механики.

Библиогр.: 14 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

Введение

Теория тонких стержней в истории развития механики и математической физики сыграла выдающуюся роль. Достаточно сказать, что именно в теории стержней (нитей) впервые в истории возникли дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных. И, разумеется, нельзя забывать, что второй закон динамики был открыт Л. Эйлером при разработке им теории стержней. Последняя зародилась в XVII в. (Г. Галилей, Я. Бернулли), интенсивно развивалась в XVIII в. (Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Даламбер) и в XIX в. (Г. Клебш, Г. Кирхгоф). Значительный вклад в механику внесли исследования по теории стержней, проведенные в XX столетии. Будучи старейшей теорией в механике сплошных сред, теория тонких стержней остается одной из самых полезных и в теоретическом, и в практическом отношениях. Именно теория тонких стержней являлась, и является поныне, тем полигоном, на котором испытывались многие методы механики сплошных сред. Можно сказать, что теория стержней является мостом, соединяющим механику дискретных и непрерывных систем. Как известно, механика дискретных систем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых в качестве независимой переменной фигурирует время t, меняющееся в интервале $0 \leq t < \infty$. Соответственно основной математической проблемой в механике дискретных систем является решение задачи с начальными данными, т. е. решение задачи Коши, которая, как правило, имеет единственное решение. Механика сплошных сред описывается уравнениями в частных производных, в которых в качестве независимых переменных выступают три пространственных координаты и время. В теории стержней фигурируют всего две независимых переменных: одна пространственная координата (обычно длина дуги упругой линии), а второй координатой является время. С одной стороны, наличие всего одной пространственной координаты сильно упрощает ситуацию в сравнении с общим случаем. С другой стороны, именно в теории стержней оказывается возможным исследовать весьма замысловатые пространственные равновесные конфигурации, а также пространственные формы движения. Важной особенностью тонкого стержня является то, что при малых деформациях он допускает весьма большие перемещения. Например, первоначально прямой стержень можно свернуть в кольцо. При этом деформации стержня останутся пренебрежимо малыми. Теорию тонких стержней можно разделить на два обширных раздела: статику и динамику. Статика стержней, разумеется, несравнимо проще динамики. Соответственно в ней получено огромное число конкретных результатов, включая нелинейные задачи. В динамике детально исследованы линейные задачи, а нелинейная динамика в настоящее время содержит достаточно обширный, но частный набор отдельных результатов. Статика стержней, подобно механике дискретных систем, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Тем не менее с математической точки зрения возникающие здесь задачи существенно отличаются от задач для систем с конечным числом степеней свободы. Дело в том, что пространственная переменная s здесь определена в конечном интервале $0 < s < l$. Поэтому вместо начальных условий здесь необходимо формулировать краевые условия, т. е. в статике стержней необходимо решать краевые задачи. Ситуация не меняется даже в том случае, когда приходится рассматривать задачи для полубесконечного интервала $0 < s < \infty$. Все равно, на бесконечности необходимо задавать те или иные условия. В отличие от задачи с начальными данными, нелинейные краевые задачи могут иметь много решений. Проблема заключается не только в построении этих решений, но и в выделении тех из них, которые реализуются в действительности. Основным инструментом здесь выступает исследование устойчивости равновесных конфигураций стержня. Только устойчивые равновесные конфигурации могут быть реализованы в действительности. При этом приходится различать устойчивость относительно малых (устойчивость в малом) возмущений и устойчивость относительно конечных возмущений (устойчивость в большом). Стержень может иметь несколько равновесных конфигураций, устойчивых относительно малых возмущений, но не устойчивых относительно конечных возмущений. Такие конфигурации могут быть реализованы на практике. Более того, они широко используются в технических приложениях — это так называемые системы с перескоками. Собственно, аналогичные проблемы возникают и в механике дискретных систем. Различие заключается только в том, что в механике дискретных систем равновесные конфигурации находятся в результате решения алгебраических или трансцендентных уравнений, а в теории стержней они находятся в результате решения краевых задач. Существует несколько подходов к анализу устойчивости [1, 2] равновесных конфигураций. Однако действительно надежным и универсальным является только метод наложения малых движений на равновесную конфигурацию стержня. Правда, этот метод позволяет исследовать только устойчивость в малом, но во многих случаях этого достаточно для практических целей.

Теория тонких стержней в целом является чрезвычайно обширным разделом механики. Например, линейная теория равновесия тонких прямолинейных стержней составляет содержание курса сопротивления материалов. В связи с этим не может быть и речи о том, чтобы в небольшом односеместровом курсе полно охватить даже основные результаты этой теории. Впрочем, по мнению автора, в настоящее время в этом и нет никакой необходимости, ибо возможности решения многих проблем теории стержней заложены в существующие стандартные пакеты программ. Фактически главной проблемой современных исследователей является не проблема решения уже поставленных задач, а общее понимание основных принципов построения теории. Необходимость в этом возникает каждый раз, когда приходится менять существующие постановки задач, включая в них те или иные дополнительные факторы. Целью данного курса является последовательное изложение теории тонких упругих стержней на основе фундаментальных законов механики. Особенностью излагаемой теории стержней является систематическое использование тензора поворота, позволяющего наиболее естественным образом описать повороты поперечных сечений стержня. Кроме того, тензор поворота оказывается удобным при рассмотрении задач совместной динамики стержня и сопряженного с ним твердого тела. Эта задача важна, например, при анализе динамики ультрацентрифуг. Существует множество проблем, в которых заранее нельзя сказать, какие факторы можно не учитывать, а какие необходимо принимать во внимание. Знание общей теории, из которой могут быть получены те ли иные частные теории, для современного инженера-исследователя является необходимостью.

1. Модель стержня и его движения

Моделью тонкого стержня является оснащенная кривая. Необходимые нам элементы теории кривых в пространстве были изложены в третьей главе книги [3]. Ниже они будут использоваться без дополнительных ссылок. Чтобы задать кривую в пространстве необходимо определить вектор-функцию скалярного аргумента

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \le s \le l, \tag{1.1}$$

где s есть длина дуги кривой; l — длина кривой.

Кривую (1.1) будем называть несущей кривой и определим для нее естественный трехгранник Френе $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}\}$, где векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ суть единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали соответственно. Наряду с введенными обозначениями будем применять следующие:

$\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}_1$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{t}_2$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{t}_3$. Для естественного трехгранника имеем формулы Серре–Френе

$$\mathbf{t}_i' = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t}_i, \quad \boldsymbol{\tau}(s) = R_t^{-1}(s)\mathbf{t}(s) - R_c^{-1}(s)\mathbf{b}(s), \tag{1.2}$$

где R_c — радиус кривизны и R_t — радиус кручения несущей кривой, $\boldsymbol{\tau}$ — вектор Дарбу несущей кривой.

В каждой точке кривой (1.1) зададим ортонормированный трехгранник

$$\mathbf{d}_k(s): \ \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n = \delta_{mn}, \ \mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2, \ \mathbf{d}_3(s) = \mathbf{r}' \equiv \mathbf{t}(s), \quad f' \equiv df/ds, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{t}(s)$ есть вектор единичной касательной к несущей кривой.

Таким образом, в каждой точке несущей кривой заданы два трехгранника: естественный трехгранник $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ и дополнительный трехгранник $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 = \mathbf{t}\}$. Векторы $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ и $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ лежат в нормальной плоскости к недеформированной несущей кривой, но, в общем случае, не совпадают между собой. Поперечное сечение стержня лежит в нормальной плоскости и занимает в ней область F. Точки поперечного сечения будем определять вектором положения

$$\tilde{\mathbf{r}}(s, x, y) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{a}(x, y), \quad \mathbf{a}(x, y) \equiv x\,\mathbf{d}_1 + y\,\mathbf{d}_2, \quad x, y \in F. \tag{1.4}$$

В дальнейшем наибольший диаметр F будет считаться достаточно малым в сравнении с длиной несущей кривой (стержня) и ее радиусами кривизны и кручения. Изменение трехгранника $\mathbf{d}_k(s)$ при движении вдоль несущей кривой будем характеризовать вектором $\mathbf{q}(s)$ таким, что

$$\mathbf{d}_k'(s) = \mathbf{q}(s) \times \mathbf{d}_k(s). \tag{1.5}$$

Вектор $\mathbf{q}(s)$ будем называть вектором Дарбу оснащения. Нетрудно установить связь между векторами Дарбу оснащения $\mathbf{q}$ и несущей кривой $\boldsymbol{\tau}$. В самом деле, трехгранники $\mathbf{t}_k$ и $\mathbf{d}_k$ могут отличаться только поворотом вокруг вектора $\mathbf{t} = \mathbf{d}_3$. Поэтому имеем связь

$$\mathbf{d}_k(s) = \mathbf{Q}[\varphi(s)\mathbf{t}(s)] \cdot \mathbf{t}_k(s),$$

где $\mathbf{Q}[\varphi(s)\mathbf{t}(s)]$ есть тензор поворота на угол крутки $\varphi(s)$ вокруг $\mathbf{t}(s)$.

Запишем уравнение Пуассона для тензора $\mathbf{Q}[\varphi(s)\mathbf{t}(s)]$

$$\mathbf{Q}' = \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{Q}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \varphi'\mathbf{t} + \sin\varphi\,\mathbf{t}' + (1 - \cos\varphi)\mathbf{t} \times \mathbf{t}'.$$

Дифференцируя предыдущее уравнение, находим вектор Дарбу оснащения

$$\mathbf{q} = \left(\varphi' + R_t^{-1}\right)\mathbf{t} - R_c^{-1}\mathbf{b} = \varphi'\mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}, \tag{1.6}$$

где φ называется углом естественной крутки стержня.

Из представления (1.6) видим, что следует различать понятия кручения несущей кривой и кручения стержня, которое определяется формулой: кручение стержня — это естественная крутка стержня плюс кручение несущей кривой. Кручение стержня определяется величиной $\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}$:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{t} = \varphi' + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} = \varphi' + R_t^{-1}. \tag{1.7}$$

Таким образом, чтобы определить рассматриваемую нами оснащенную кривую, необходимо задать репер $\{\mathbf{r}(s),\, \mathbf{d}_1(s),\, \mathbf{d}_2(s),\, \mathbf{d}_3(s)\}$ при ограничении $\mathbf{d}_3(s) = \mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}(s)$. Чтобы яснее понять необходимость введенной оснащенной кривой в качестве модели стержня, рассмотрим описание обычного сверла. Сверло есть прямолинейный стержень. Следовательно, несущая кривая является прямой

$$\mathbf{r}(s) = s\,\mathbf{t}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1, \quad \mathbf{t} = \mathrm{const}.$$

Естественный трехгранник для прямой определен неоднозначно, но он и не нужен. Поперечное сечение сверла неизменно по форме, но поворачивается при движении вдоль несущей прямой на постоянный погонный угол α вокруг вектора $\mathbf{t}$. Поворот поперечного сечения описывается поворотом оснащающего трехгранника. Уравнение (1.5) в данном случае принимает вид:

$$\mathbf{d}_k'(s) = \alpha\mathbf{t} \times \mathbf{d}_k(s) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}_k(s) = \mathbf{Q}(\alpha s\,\mathbf{t}) \cdot \mathbf{d}_k(0),$$

где $\mathbf{Q}(\alpha s\,\mathbf{t})$ есть тензор поворота на угол $\alpha\, s$ вокруг $\mathbf{t}$.

Сверло является примером естественно закрученного стержня. Принятая модель стержня предполагает, что в процессе движения поперечные сечения стержня могут поворачиваться произвольным образом, но их форма должна меняться незначительно. Это существенное ограничение, исключающее из рассмотрения, например, тонкостенные стержни.

Обратимся к описанию движений стержня. Недеформированное состояние оснащенной кривой (стержня) будем называть отсчетной конфигурацией. Конфигурацию стержня в данный момент времени t будем называть актуальной. Переход стержня из отсчетной конфигурации в актуальную называется движением стержня и определяется заданием отображений

$$\mathbf{r}(s) \quad \to \quad \mathbf{R}(s,t); \qquad \mathbf{d}_k(s) \quad \to \quad \mathbf{D}_k(s,t).$$

Движение будем характеризовать заданием вектора перемещения $\mathbf{u}(s,t)$ и тензора поворота $\mathbf{P}(s,t)$

$$\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{u}(s,t), \qquad \mathbf{D}_k(s,t) = \mathbf{P}(s,t) \cdot \mathbf{d}_k(s). \tag{1.8}$$

В процессе движения точки поперечного (до деформации) сечения стержня также смещаются и уже не принадлежат поперечному (нормальному) сечению деформированного стержня. В актуальной конфигурации формулы (1.4) принимают вид:

$$\tilde{\mathbf{R}}(s, x, y, t) = \mathbf{R}(s, t) + x\,\mathbf{D}_1(s, t) + y\,\mathbf{D}_2(s, t), \quad x, y \in F. \tag{1.9}$$

Трансляционная скорость вершины репера, т. е. точки несущей кривой с координатой s, и угловая скорость вращения трехгранника $\mathbf{D}_k(s, t)$ определяются стандартным образом:

$$\mathbf{V}(s, t) = \dot{R}(s, t), \quad \dot{\mathbf{P}}(s, t) = \boldsymbol{\omega}(s, t) \times \mathbf{P}(s, t), \quad \dot{f} \equiv df/dt. \tag{1.10}$$

Второе из уравнений (1.10) называется уравнением Пуассона. Если тензор поворота задан, то угловая скорость вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}(s, t) = -\frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{T}\right]_{\times}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{1.11}$$

2. Динамические структуры стержня

В качестве тела $\mathcal{A}$ выбираем часть стержня, заключенную в замкнутом интервале $[s_1,\, s_2]$. Массу стержня в отсчетной конфигурации будем характеризовать неотрицательной функцией $\rho_0(s) \geq 0$ такой, что $dm = \rho_0(s)ds$. В процессе движения погонная плотность стержня меняется, но его масса сохраняется

$$ds \,\rightarrow\, dS(s, t), \quad \rho_0(s) \,\rightarrow\, \rho(s, t), \quad \rho_0(s)ds = \rho(s, t)dS(s, t).$$

Откуда следует, что

$$\rho(s, t) = \frac{\rho_0(s)}{1 + \varepsilon(s, t)}, \quad \varepsilon(s, t) \equiv \frac{dS(s, t) - ds}{ds}, \tag{2.1}$$

где функция $\varepsilon(s, t)$ называется относительным удлинением стержня.

Кинетическая энергия стержня рассматривалась в пятой главе книги [4]. В силу ее аддитивности по массе она может быть представлена интегралом по массе

$$K(\mathcal{A}) = \int_{s_1}^{s_2} \rho_0(s)\mathcal{K}(s, t)ds =$$
$$= \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{1}{2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1(s, t) \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}_2(s, t) \cdot \boldsymbol{\omega}\right) \rho_0(s)ds,$$

где $\mathcal{K}(s,t)$ называется массовой плотностью кинетической энергии, тензоры $\boldsymbol{\Theta}_1(s,t)$ и $\boldsymbol{\Theta}_2(s,t)$ суть массовые плотности тензоров инерции.

Второй тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}_2(s,t)$ полярен и симметричен, а первый тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}_1(s,t)$ — аксиален. Для того чтобы плотность кинетической энергии была неотрицательно определена, необходима неотрицательность тензора $\boldsymbol{\Theta}_2-\boldsymbol{\Theta}_1^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\Theta}_1$. Для тензоров инерции выполняются соотношения, аналогичные равенствам (5.1.5) книги [4]:

$$\boldsymbol{\Theta}_1(s,t)=\mathbf{P}(s,t)\cdot\boldsymbol{\Theta}_1^{(0)}(s)\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(s,t),\quad \boldsymbol{\Theta}_2(s,t)=\mathbf{P}(s,t)\cdot\boldsymbol{\Theta}_2^{(0)}(s)\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(s,t),$$

где тензоры инерции, помеченные верхними индексами (0), определены в отсчетной конфигурации.

Если стержень однороден, т. е. имеет постоянное сечение и выполнен из однородного материала, то функции ρ_0, $\boldsymbol{\Theta}_1^{(0)}$ и $\boldsymbol{\Theta}_2^{(0)}$ приближенно постоянны, т. е. слабо зависят от координаты s. Это наиболее часто встречающийся в приложениях случай. Для количества движения тела $\mathcal{A}$ имеем представление

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A})=\int_{s_1}^{s_2}\rho_0\boldsymbol{\mathcal{K}}_1 ds=\int_{s_1}^{s_2}\rho_0\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{V}}ds=\int_{s_1}^{s_2}\left(\mathbf{V}+\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\rho_0 ds.$$

При вычислении кинетического момента в качестве опорной точки выберем начало в системе отсчета. В качестве точки приведения выбираем вершину репера $\{\mathbf{R}(s,t),\,\mathbf{D}_1(s,t),\,\mathbf{D}_2(s,t),\,\mathbf{D}_3(s,t)\}$. Тогда для кинетического момента стержня имеем

$$\mathbf{K}_2(\mathcal{A})=\int_{s_1}^{s_2}\rho_0\boldsymbol{\mathcal{K}}_2 ds=\int_{s_1}^{s_2}\rho_0\left[\mathbf{R}(s,t)\times\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\mathbf{V}}+\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right]ds=$$
$$=\int_{s_1}^{s_2}\rho_0\left[\mathbf{R}(s,t)\times(\mathbf{V}(s,t)+\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\omega}(s,t))+\mathbf{V}(s,t)\cdot\boldsymbol{\Theta}_1+\boldsymbol{\Theta}_2\cdot\boldsymbol{\omega}(s,t)\right]ds.$$

Определение тензоров инерции. Чтобы завершить задание динамических структур стержня, осталось вычислить функции ρ_0, $\boldsymbol{\Theta}_1^{(0)}$ и $\boldsymbol{\Theta}_2^{(0)}$. Рассмотрим часть несущей линии, заключенную в интервале $[s-\triangle s/2, s+\triangle s/2]$. Отвечающий этой части линии стержень, рассматриваемый как трехмерное тело, занимает область

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{s},x,y)=\mathbf{r}(\tilde{s})+x\,\mathbf{d}_1+y\,\mathbf{d}_2,\quad s-\triangle s/2\ \le\tilde{s}\le s+\triangle s/2,\ x,y\in F.$$

Рассмотрим кривую, проходящую через точки поперечных сечений стержня с координатами $(x_*,\,y_*)$:

$$\mathbf{r}_*(\tilde{s})\equiv\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{s},\,x_*,\,y_*)=\mathbf{r}(\tilde{s})+x_*\,\mathbf{d}_1(\tilde{s})+y_*\,\mathbf{d}_2(\tilde{s}),\quad x_*,\,y_*\in F.$$

Вектор касательной $\mathbf{t}_*$ и элемент дуги этой кривой вычисляются по формулам

$$\mathbf{t}_*(\tilde{s}) = \mathbf{r}'_*(\tilde{s}) = \mathbf{t}(\tilde{s}) + \mathbf{q}(\tilde{s}) \times \mathbf{a}_*(\tilde{s}), \quad d\tilde{s}_* = |\mathbf{t}_*(\tilde{s})| d\tilde{s},$$

где использовано обозначение (1.4).

Вычислим элемент объема в точке $(\tilde{s}_*,\ x_*,\ y_*)$

$$dV = (dx\mathbf{d}_1 \times dy\mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{t}_* d\tilde{s} = \mu dx\, dy\, d\tilde{s}, \quad \mu \equiv 1 + (\mathbf{t} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{a}.$$

Выражение для μ можно представить в другой форме

$$\mu \equiv 1 + (\mathbf{t} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{a} = 1 - \mathbf{t}' \cdot \mathbf{a} = 1 + \kappa(s)\, \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{a}(s, x, y),$$

где $\kappa(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ — кривизна и главная нормаль несущей линии.

Вычислим массу рассматриваемой части стержня

$$\triangle m = \int\limits_{s-\triangle s/2}^{s+\triangle s/2} d\tilde{s} \int\limits_{(F)} \tilde{\rho}(\tilde{s}, x, y) \mu(\tilde{s}, x, y)\, dx\, dy,$$

где $\tilde{\rho}$ есть объемная плотность массы материала, из которого изготовлен стержень.

Погонная плотность стержня определяется по формуле

$$\rho_0 = \lim_{\triangle s \to 0} \frac{\triangle m}{\triangle s} = \int\limits_{(F)} \tilde{\rho}(\tilde{s}, x, y) \mu(\tilde{s}, x, y)\, dx\, dy.$$

Если материал однороден, т. е. $\tilde{\rho} = \mathrm{const}$, то эта формула упрощается

$$\rho_0 = \tilde{\rho} F \left[1 + \underline{\kappa(s) \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{a}_c(s)} \right], \quad \mathbf{a}_c(s) \equiv \frac{1}{F} \int\limits_{(F)} \mathbf{a}\, dx\, dy,$$

где F — площадь поперечного сечения стержня.

Для тонких стержней подчеркнутое слагаемое, как правило, мало, и его можно отбросить. Оно в точности обращается в нулевое для прямолинейных стержней $\kappa(s) = 0$ и в ряде других случаев. Вполне аналогично вычисляются и тензоры инерции. Согласно определению первого тензора инерции для абсолютно твердого тела (5.3.5) из [4] имеем

$$\triangle \mathbf{\Theta}_1^{(3)} = - \int\limits_{s-\triangle s/2}^{s+\triangle s/2} d\tilde{s} \int\limits_{(F)} \mathbf{E} \times (\mathbf{a} + \mathbf{z}) \tilde{\rho} \mu\, dx\, dy,$$

где вектор $\mathbf{z}$ стремится к нулю при $\triangle s$, стремящемся к нулю.

Погонная плотность первого тензора инерции определяем по формуле

$$\rho_0 \boldsymbol{\Theta}_1^0 = \lim_{\triangle s \to 0} \frac{\triangle \boldsymbol{\Theta}_1^{(3)}}{\triangle s} = -\int\limits_{(F)} \mathbf{E} \times \mathbf{a} \tilde{\rho} \mu \, dx \, dy = -\mathbf{E} \times \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} \equiv \int\limits_{(F)} \mathbf{a} \tilde{\rho} \mu \, dx \, dy. \quad (2.2)$$

Для прямолинейных стержней из однородного материала вектор $\mathbf{d}$ равен $\mathbf{d} = \tilde{\rho} F \, \mathbf{a}_c$, т. е. $\boldsymbol{\Theta}_1^0 = -\mathbf{E} \times \mathbf{a}_c$. Для второго тензора инерции, согласно формуле (5.5.2) из [4], имеем

$$\triangle \boldsymbol{\Theta}_2^{(3)} = -\int\limits_{s-\triangle s/2}^{s+\triangle s/2} d\tilde{s} \int\limits_{(F)} (\mathbf{a} + \mathbf{z}) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{a} + \mathbf{z}) \tilde{\rho} \mu \, dx \, dy.$$

Погонная плотность второго тензора инерции определяем по формуле

$$\rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2^0 = \lim_{\triangle s \to 0} \frac{\triangle \boldsymbol{\Theta}_2^{(3)}}{\triangle s} = \int\limits_{(F)} \left(a^2 \mathbf{E} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \right) \tilde{\rho}(\tilde{s}, x, y) \mu(\tilde{s}, x, y) \, dx \, dy. \qquad (2.3)$$

Поскольку тензор $\boldsymbol{\Theta}_2^0$ симметричен, то для него справедлива теорема о спектральном разложении. Исходя из формулы (2.3) видим, что вектор $\mathbf{t}$ является собственным вектором $\boldsymbol{\Theta}_2^0$, ибо $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = 0$. Кроме того, будем считать, что векторы $\mathbf{d}_1(s)$ и $\mathbf{d}_2(s)$ также являются собственными векторами тензора $\boldsymbol{\Theta}_2^0$. Это допустимо, ибо мы еще не налагали никаких условий на выбор векторов $\mathbf{d}_1(s)$ и $\mathbf{d}_2(s)$. Таким образом, имеем

$$\rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2^0(s) = \Theta \, \mathbf{t}(s) \otimes \mathbf{t}(s) + \Theta_1 \, \mathbf{d}_1(s) \otimes \mathbf{d}_1(s) + \Theta_2 \, \mathbf{d}_2(s) \otimes \mathbf{d}_2(s), \qquad (2.4)$$

где собственные числа определяются по формулам

$$\Theta_1 = \mathbf{d}_1 \cdot \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2^0 \cdot \mathbf{d}_1 = \int\limits_{(F)} y^2 \tilde{\rho} \mu \, dx \, dy, \quad \Theta_2 = \mathbf{d}_2 \cdot \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2^0 \cdot \mathbf{d}_2 = \int\limits_{(F)} x^2 \tilde{\rho} \mu \, dx \, dy,$$

$$\Theta = \mathbf{t} \cdot \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2^0 \cdot \mathbf{t} = \int\limits_{(F)} \left(x^2 + y^2 \right) \tilde{\rho} \mu \, dx \, dy = \Theta_1 + \Theta_2. \qquad (2.5)$$

Кроме того, из спектрального разложения второго тензора инерции следует тождество

$$\mathbf{d}_1 \cdot \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2^0 \cdot \mathbf{d}_2 = -\int\limits_{(F)} xy \tilde{\rho} \mu \, dx \, dy = 0.$$

Пример. Стержень из однородного материала прямоугольного сечения*, т. е.* $\tilde{\rho} = \mathrm{const}$, $-h/2 \le x \le h/2$, $-H/2 \le y \le H/2$. *Проводя вычисления, получаем*

$$\rho_0 = \tilde{\rho}F, \quad \mathbf{d} = \frac{\tilde{\rho}F}{12R_c}\mathbf{n} \cdot \left(h^2\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + H^2\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2\right),$$

где R_c *есть радиус кривизны несущей линии;*

$$\Theta_1 = \tilde{\rho}F\frac{H^2}{12}, \quad \Theta_2 = \tilde{\rho}F\frac{h^2}{12}, \quad \Theta = \tilde{\rho}F\left(\frac{H^2}{12} + \frac{h^2}{12}\right). \tag{2.6}$$

Истолкование смещений и поворотов в теории тонких стержней. На первый взгляд кажется, что вектор смещения точек несущей линии следует истолковывать буквально, т. е. считать, что вектор $\mathbf{u}$ в формулах (1.8) описывает *реальные смещения* точек несущей линии. К сожалению, подобное истолкование ведет к противоречиям при сравнении результатов, получаемых по теории стержней, с результатами, получаемым на основе трехмерной теории упругости. Противоречий можно избежать, если принять приводимое ниже истолкование смещений и поворотов в стержне.

Стержень — это модель тонкого трехмерного тела. Потребуем, чтобы количество движения и кинетический момент у модели и у трехмерного тела (прообраза) совпадали бы между собой. В результате придем к следующим уравнениям:

$$\rho_0\left(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}\right) = \int \tilde{\rho}\dot{\mathbf{u}}_{(3)}\mu\, dxdy,$$

$$\rho_0\left(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}\right) = \int \tilde{\rho}\left(\mathbf{a}' + \mathbf{u}_*\right) \times \dot{\mathbf{u}}_{(3)}\mu\, dxdy,$$

где интегрирование ведется по площади поперечного сечения, $\mathbf{u}_{(3)}$ есть вектор смещений точек трехмерной среды, $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_{(3)} - \mathbf{u}$, $\mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$. В нелинейном случае приводимую интерпретацию использовать сложно, но в этом, обычно, и нет необходимости. В линейной теории приводимые уравнения существенно упрощаются

$$\rho_0\left(\mathbf{u} + \boldsymbol{\Theta}_1^0 \cdot \boldsymbol{\psi}\right) = \int \tilde{\rho}\mathbf{u}_{(3)}\mu\, dxdy,$$

$$\rho_0\left(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1^0 + \boldsymbol{\Theta}_2^0 \cdot \boldsymbol{\psi}\right) = \int \tilde{\rho}\mathbf{a} \times \mathbf{u}_{(3)}\mu\, dxdy. \tag{2.7}$$

При сравнении результатов, получаемых по теории стержней и по трехмерной теории упругости, необходимо пользоваться формулами (2.7). Обратим внимание, что для неоднородных стержней осреднение трехмерных перемещений ведется с весом $\tilde{\rho}$. Иногда для истолкования перемещений и поворотов в стержне используют кинетическую энергию. Однако кинетическая энергия стержня (модели) не совпадает с кинетической энергией трехмерного тела (прообраза) и не должна совпадать. Причина в том, что в отличие от количества движения и кинетического момента, кинетическая энергия даже изолированного тела не сохраняется.

3. Фундаментальные законы механики

Интегральная запись первого закона динамики Эйлера имеет вид

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_0 \dot{\mathcal{K}}_1 ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}(s,t) ds + \mathbf{N}_{(\mathbf{t})}(s_2,t) + \mathbf{N}_{(-\mathbf{t})}(s_1,t),$$

где $\mathbf{N}_{(\mathbf{t})}(s_2,t)$ моделирует силу, действующую со стороны части стержня, находящейся правее точки s_2; $\mathbf{N}_{(-\mathbf{t})}(s_1,t)$ моделирует силу, действующую со стороны части стержня, находящейся левее точки s_1.

При формулировке второго закона динамики Эйлера необходимо выбрать опорную точку и точку приведения. В качестве опорной точки выберем начало в системе отсчета, а в качестве точки приведения выберем точку $\mathbf{R}(s,t)$. Запишем интегральную форму второго закона динамики Эйлера

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_0 \dot{\mathcal{K}}_2 ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_0 \left[\mathbf{R}(s,t) \times \boldsymbol{\mathcal{F}}(s,t) + \boldsymbol{\mathcal{L}}(s,t)\right] ds +$$
$$+ \mathbf{R}(s_2,t) \times \mathbf{N}_{(\mathbf{t})}(s_2,t) + \mathbf{R}(s_2,t) \times \mathbf{N}_{(-\mathbf{t})}(s_1,t) + \mathbf{M}_{(\mathbf{t})}(s_2,t) + \mathbf{M}_{(-\mathbf{t})}(s_1,t),$$

где $\mathbf{M}_{(\mathbf{t})}(s_2,t)$ моделирует момент, действующий со стороны части стержня, находящейся правее точки s_2; $\mathbf{M}_{(-\mathbf{t})}(s_1,t)$ моделирует момент, действующий со стороны части стержня, находящейся левее точки s_1.

Применяя эти уравнения к бесконечно малым отрезкам стержня, доказываем аналог третьего закона Ньютона:

$$\mathbf{N}(s,t) \equiv \mathbf{N}_{(\mathbf{t})}(s,t) = -\mathbf{N}_{(-\mathbf{t})}(s,t), \quad \mathbf{M}(s,t) \equiv \mathbf{M}_{(\mathbf{t})}(s,t) = -\mathbf{M}_{(-\mathbf{t})}(s,t).$$

Используя эти равенства и произвольность выбора точек s_1 и s_2, получаем локальную форму законов динамики

$$\mathbf{N}'(s,t) + \rho_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}(s,t) = \rho_0 \left(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot}, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} + \rho_0 \boldsymbol{\mathcal{L}} = \rho_0 \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} + \rho_0 \left(\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot}. \tag{3.2}$$

Запишем третий фундаментальный закон механики, т.е. уравнение баланса энергии (Грин Дж., 1939)

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_0 \left(\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{U}}\right) ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_0 \left[\boldsymbol{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\mathcal{L}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathcal{Q}\right] ds + \left(\mathbf{N} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} + h\right)\Big|_{s_1}^{s_2},$$

где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Q}$ суть массовые плотности внутренней энергии и скорости подвода энергии соответственно, h — скорость подвода энергии через торцы стержня.

Нетрудно получить выражение

$$\dot{\mathcal{K}} = (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega})^{\cdot} \cdot \mathbf{V} + \left[\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 + \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega})^{\cdot}\right] \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Используя это выражение и уравнения (2.5)–(3.1), переписываем уравнение баланса энергии в локальной форме

$$\rho_0 \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{V}' + \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}' + h' + \rho_0 \mathcal{Q}. \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение векторы деформации: $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — вектор деформации растяжения–поперечного сдвига; $\boldsymbol{\Phi}$ — вектор деформации изгиба–кручения. Они определяются формулами

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P}. \tag{3.4}$$

Если векторы $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю, то стержень движется как жесткое целое. Наоборот, если стержень испытывает только смещение как жесткое целое, то $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю. Действительно, если стержень движется как абсолютно твердое тело, то по основной теореме кинематики (3.2.6), (3.2.7) из работы [4] имеем представления

$$\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{R}(s_*,t) + \mathbf{P}(s_*,t) \cdot [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_*)], \quad \mathbf{P}(s,t) = \mathbf{P}(s_*,t),$$

где s_* — некоторая фиксированная точка стержня.

Подставляя эти выражения в систему (3.4), убеждаемся, что векторы деформации обращаются в нулевые. Легко доказывается и обратное утверждение.

Векторы деформации удовлетворяют уравнениям интегрируемости, которые вытекают из тождеств

$$(\dot{\mathbf{R}})' = (\mathbf{R}')^{\cdot}, \quad (\dot{\mathbf{P}})' = (\mathbf{P}')^{\cdot}.$$

Подставляя сюда выражения (1.10) и (3.4), получаем следующие уравнения неразрывности:

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{V}' + \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\omega}'. \tag{3.5}$$

Подставляя уравнения (3.5) в (3.3), получаем

$$\rho_0\dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N}\cdot\left(\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathcal{E}\right) + \mathbf{M}\cdot(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Phi}) + h' + \rho_0\mathcal{Q}. \tag{3.6}$$

Уравнение баланса энергии в форме (3.6) является основой для последующего анализа.

4. Введение энтропии и соотношения Коши–Грина

Усилие и момент в стержне представим в виде суперпозиции упругих ($\mathbf{N}_e$, $\mathbf{M}_e$) и диссипативных ($\mathbf{N}_d$, $\mathbf{M}_d$) слагаемых

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_e(\mathcal{E}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}) + \mathbf{N}_d(s,t), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_e(\mathcal{E}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}) + \mathbf{M}_d(s,t).$$

Упругими называют составляющие усилий и моментов, которые не зависят от скоростей. Диссипативные составляющие могут зависеть как от скоростей, так и от всей предыстории движения. Термин “диссипативные” может ввести в заблуждение, ибо он наводит на идею о диссипации, т. е. рассеянии, энергии и так или иначе связывается с трением. На самом деле это справедливо только частично.[1]

Обозначим через ϑ температуру стержня, измеряемую каким-либо термометром, т. е. температура является экспериментально определяемым параметром. Для простоты считаем, что температура не меняется по сечению стержня. В противном случае необходимо вводить несколько температур и, соответственно, несколько энтропий, как это сделано в работах [5, 6] (см. также [4]). Введем новую функцию η, называемую энтропией. По определению, она находится по уравнению

$$\vartheta\dot{\eta} = h' + \rho_0\mathcal{Q} + \mathbf{N}_d\cdot\left(\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathcal{E}\right) + \mathbf{M}_d\cdot(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Phi}). \tag{4.1}$$

Принятое определение энтропии отличается от традиционного и не нуждается в понятиях обратимых и необратимых процессов. Введение энтропии посредством равенства (4.1) возможно для любых процессов. Равенство (4.1) называется уравнением теплопроводности и описывает процесс распространения тепла в стержне.

[1] Диссипативные составляющие можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{N}_d = \boldsymbol{\lambda}_n\times\left(\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathcal{E}\right) + \mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_d\cdot\mathbf{P}^T\cdot\left(\dot{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathcal{E}\right).$$

Используя (4.1), уравнение баланса энергии (3.6) переписываем в следующем виде:

$$\rho_0\dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N}_e \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + \mathbf{M}_e \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}\right) + \vartheta\dot{\eta}. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) называется *приведенным уравнением баланса энергии.* Важность этого уравнения определяется тем, что оно указывает, от каких аргументов зависит внутренняя энергия. Покажем, что внутренняя энергия есть функция следующих аргументов:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}, \eta).$$

Понятно, что внутренняя энергия должна быть инвариантна относительно наложения жестких движений. Рассмотрим два движения стержня: $\mathbf{R}(s,t)$, $\mathbf{P}(s,t)$ и $\mathbf{R}_*(s,t)$, $\mathbf{P}_*(s,t)$, которые связаны соотношением

$$\mathbf{R}_*(s,t) - \mathbf{R}_*(\tilde{s},t) = \mathbf{Q}(\alpha)\cdot[\mathbf{R}(s,t) - \mathbf{R}(\tilde{s},t)], \quad \mathbf{P}_*(s,t) = \mathbf{Q}(\alpha)\cdot\mathbf{P}(s,t), \tag{4.3}$$

где $\mathbf{Q}(\alpha)$ — семейство собственно ортогональных тензоров, непрерывно зависящее от параметра α; $\tilde{s}$ — фиксированная координата.

Из равенства (4.3) видим, что расстояния между любыми двумя точками стержня с координатами s и $\tilde{s}$ в обоих движениях одинаково. Кроме того, повороты всех сечений стержня в обоих движениях различаются только постоянным, не зависящим от координаты сечения s поворотом. В таком случае и говорят, что два движения различаются между собой жестким движением, т. е. движением стержня как жесткого целого.

Согласно определению векторов деформации (3.4)и формуле (1.11), имеем

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_*(s,t) = \mathbf{R}_*' - \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{t} = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}(s,t),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_*(s,t) = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{P}_*' \cdot \mathbf{P}_*^{\mathsf{T}}\right]_\times = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\right]_\times = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi}(s,t).$$

Инвариантность внутренней энергии относительно преобразования (4.3) требует выполнения следующего равенства:

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_*, \boldsymbol{\Phi}_*, \mathbf{P}_*, \eta) = \mathcal{U}[\mathbf{Q}(\alpha)\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}},\ \mathbf{Q}(\alpha)\cdot\boldsymbol{\Phi},\ \mathbf{Q}(\alpha)\cdot\mathbf{P},\ \eta] = \mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}, \eta). \tag{4.4}$$

Для тензора $\mathbf{Q}(\alpha)$ примем

$$\frac{d}{d\alpha}\mathbf{Q}(\alpha) = \boldsymbol{\zeta}(\alpha) \times \mathbf{Q}(\alpha), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\omega}(t).$$

Учитывая эти равенства, дифференцируя предыдущее равенство по α и полагая в получившемся уравнении $\alpha = 0$, получаем уравнение, которому должна удовлетворять внутренняя энергия

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi}\right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}}\right)^{\mathsf{T}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = 0. \tag{4.5}$$

Вычислим производную по времени от внутренней энергии

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}}\right)^{\mathsf{T}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = 0.$$

Исключая из этого равенства последнее слагаемое с помощью уравнения (4.5), получаем

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}\right).$$

Подставляя это равенство в приведенное уравнение баланса энергии (4.2), получаем

$$\left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} - \mathbf{N}_e\right) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}\right) + \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} - \mathbf{M}_e\right) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}\right) + \\ + \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \eta} - \vartheta\right) \dot{\eta} = 0. \tag{4.6}$$

Поскольку уравнение (4.6) должно выполняться для произвольных значений η и векторов $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}$, из этого уравнения следуют соотношения Коши–Грина

$$\mathbf{N}_e = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}, \quad \mathbf{M}_e = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}}, \quad \vartheta = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \eta}. \tag{4.7}$$

Кроме того, выбирая в соотношении (4.4) $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}$, получаем, что фактически внутренняя энергия является функцией следующих аргументов:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times,\ \boldsymbol{\Phi}_\times,\ \eta), \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times \equiv \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \boldsymbol{\Phi}_\times \equiv \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\Phi}. \tag{4.8}$$

Векторы $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и $\boldsymbol{\Phi}_\times$ называют энергетическими векторами деформации.

Для завершения общей теории осталось задать конкретный вид внутренней энергии и определяющие уравнения для диссипативных усилия $\mathbf{N}_d$ и момента $\mathbf{M}_d$. Для термоупругих стержней они равны нулю.

Пример. Осесимметричные колебания кольца прямоугольного сечения. *При осесимметричных колебаниях движение кольца задается следующим образом:*

$$\mathbf{R}(s,t) = [a + w(t)]\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{P}(s,t) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \dot{w}(t)\mathbf{n}(s), \ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},$$

где a *есть радиус несущей кривой. Примем, что процесс изотермический, трение и внешние нагрузки отсутствуют*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathbf{N}_d = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{M}_d = \mathbf{0}, \quad \mathcal{Q} = 0, \quad \vartheta = \mathrm{const}, \quad \eta = \mathrm{const}.$$

Примем, что несущая линия проходит через центры инерции поперечных сечений кольца, а главные оси инерции поперечного сечения повернуты относительно естественного трехгранника на угол α

$$\mathbf{d}_1 = \cos\alpha\,\mathbf{n} + \sin\alpha\,\mathbf{b}, \quad \mathbf{d}_2 = -\sin\alpha\,\mathbf{n} + \cos\alpha\,\mathbf{b}. \tag{4.9}$$

Вычислим инерционные члены в уравнениях (3.1) и (3.2)

$$\rho_0\dot{\mathbf{V}} = \tilde{\rho}F\ddot{w}\mathbf{n} = -\tilde{\rho}Fa\ddot{w}\,\mathbf{t}', \quad \rho_0\dot{\mathbf{V}}\cdot\boldsymbol{\Theta}_1 = -\ddot{w}\,\mathbf{n}\times\mathbf{d} = -\lambda\ddot{w}\,\mathbf{t} = -a\lambda\ddot{w}\,\mathbf{n}',$$

где

$$\lambda = \tilde{\rho}\frac{\sin 2\alpha}{2a}\int\limits_{(F)}(x^2 - y^2)dxdy.$$

Для стержня прямоугольного сечения после простых преобразований уравнения движения (3.1) и (3.2) принимают следующий вид:

$$[\mathbf{N}(s,t) + \tilde{\rho}Fa\ddot{w}(t)\mathbf{t}(s)]' = \mathbf{0},$$

$$\left[\mathbf{M} - \frac{\tilde{\rho}F}{24}(H^2 - h^2)\sin 2\alpha\ddot{w}(t)\mathbf{n}(s)\right]' + \left(1 + \frac{\ddot{w}(t)}{a}\right)\mathbf{t}\times\mathbf{N} = \mathbf{0}.$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая, что возникающие при этом постоянные векторы обязаны равняться нулю, получаем

$$\mathbf{N}(s,t) = -\tilde{\rho}Fa\ddot{w}(t)\mathbf{t}(s), \quad \mathbf{M} = \frac{\tilde{\rho}F}{24}(H^2 - h^2)\sin 2\alpha\ddot{w}(t)\mathbf{n}(s). \tag{4.10}$$

Обращает на себя внимание тот факт, что при $H \neq h$ *и* $\alpha \neq 0$ *вектор момента* $\mathbf{M}$ *отличен от нулевого вектора. Уравнения (4.10) полезны при тестировании определяющих уравнений и будут использованы позднее именно для этих целей. Первое уравнение системы (4.10) приводит к уравнению нелинейного осциллятора*

$$\ddot{w}(t) + f(w) = 0,$$

где вид функции $f(w)$ определяется заданием внутренней энергии.

Заметим, что из уравнений (4.10) следует универсальная связь между усилиями и моментами

$$24a\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{n} + (H^2 - h^2)\sin 2\alpha\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{t} = 0, \tag{4.11}$$

которая должна выполняться при любом задании внутренней энергии.

Парадокс. *Очевидно, что тензор зеркального отражения от плоскости, проходящей через центр кольца ортогонально вектору касательной к несущей линии $\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}$, должен принадлежать к группе симметрии всех величин, встречающихся в данной задаче. Однако для вектора усилий имеем $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{N} = -\mathbf{N} \neq \mathbf{N}$, т. е. $\mathbf{Q}$ не принадлежит к группе симметрии $\mathbf{N}$. Решение этого кажущегося парадокса будет приведено ниже.*

5. Геометрический смысл векторов деформации

Формулами (3.4) в рассмотрение были введены векторы деформации. При этом их геометрический смысл во внимание не принимался. Между тем ясное представление о смысле векторов деформации является необходимым для успешного применения теории стержней, особенно при использовании ее упрощенных вариантов.

Первый вектор деформации представим в виде разложения

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times = \epsilon\mathbf{t} + \Gamma_1\mathbf{d}_1 + \Gamma_2\mathbf{d}_2. \tag{5.1}$$

Тогда относительное удлинение стержня (несущей линии), введенное выражением (2.1), вычисляется через первый вектор деформации $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ посредством формулы

$$1 + \varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times + 2\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times\cdot\mathbf{t} + 1} = \sqrt{(1+\epsilon)^2 + \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}. \tag{5.2}$$

До деформации вектор касательной $\mathbf{t}$ к несущей линии был ортогонален вектору $\mathbf{d}_1$. Вычислим положение касательной к деформированной несущей линии $\mathbf{R}'$ относительно векторов $\mathbf{D}_k$, жестко связанных с сечением стержня, которое до деформации было поперечным

$$\mathbf{R}'\cdot\mathbf{D}_\alpha = (\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{P}\cdot\mathbf{t})\cdot\mathbf{D}_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{t}\cdot\mathbf{d}_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\mathbf{D}_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times\cdot\mathbf{d}_\alpha = \Gamma_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

С другой стороны, имеем формулы

$$\Gamma_\alpha = \mathbf{R}'\cdot\mathbf{D}_\alpha = |\mathbf{R}'|\,|\mathbf{D}_\alpha|\cos(\widehat{\mathbf{R}',\mathbf{D}_\alpha}) = (1+\varepsilon)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_\alpha\right) = (1+\varepsilon)\sin\gamma_\alpha,$$

где γ_α суть изменения первоначально (до деформации) прямых углов.

Величины Γ_α называются *деформациями поперечного сдвига*; они показывают, насколько поперечное (бывшее поперечным до деформации) сечение стержня отклоняется от поперечного сечения деформированного стержня. Поперечным называется сечение деформированного стержня плоскостью, ортогональной вектору касательной к деформированной несущей кривой. Первый вектор деформации принято называть *вектором деформации растяжения-сдвига*. До сих пор мы не использовали предположений о малости деформаций. Однако, например для металлических стержней, деформации ε, γ_1 и γ_2 очень малы, порядка десятых долей процента и меньше. Поэтому во многих случаях вполне допустимы приближенные представления

$$\epsilon = \varepsilon, \quad \Gamma_1 = \gamma_1, \quad \Gamma_2 = \gamma_2, \quad \varepsilon, \gamma_1, \gamma_2 \sim 10^{-3}.$$

Заметим, что перемещения и повороты стержня при этом могут быть большими. Например, первоначально прямой стержень можно свернуть в кольцо, и при этом растяжения и сдвиги останутся пренебрежимо малыми. Более того, в реальных задачах большие перемещения и повороты стержня возможны, как правило, именно при малых деформациях. Поэтому часто применяется кинематическая гипотеза об отсутствии сдвигов, а именно принимается гипотеза, что поперечные (материальные) сечения, которые до деформации были ортогональны вектору $\mathbf{r}'$, после деформации остаются ортогональными вектору $\mathbf{R}'$. Математически эта гипотеза выглядит так

$$\Gamma_\alpha = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{D}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = (1 + \varepsilon)\mathbf{P} \cdot \mathbf{t}. \tag{5.3}$$

В этом случае основными неизвестными являются относительное удлинение и тензор поворота, т. е. имеем четыре степени свободы (вместо шести) у каждой точки стержня. Допущение (5.3) принималось еще Я. Бернулли и Л. Эйлером при создании первоначальной теории стержней. Позднее оно использовалось в работах Г. Клебша и Г. Кирхгофа. Теории стержней, в которых принимается допущение (5.3), в литературе принято называть *классическими теориями стержней*. Учет деформации поперечного сдвига впервые последовательно был осуществлен братьями Э. и Ф. Коссера в 1908 г. Теории, в которых учитываются деформации поперечного сдвига (не говоря уже об учете дополнительных факторов), принято называть *неклассическими теориями стержней*.

Очень часто, особенно при больших перемещениях и поворотах, практически приемлема гипотеза о нерастяжимости стержня, т. е. условие (5.3) дополняется условием

$$\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}. \tag{5.4}$$

На практике допущение (5.4) для упругих тонких стержней имеет очень широкую область применимости и потому весьма популярно.

Обратимся к рассмотрению второго вектора деформации $\mathbf{\Phi}$, введенного формулами (3.4). Введем вектор Дарбу оснащения в актуальной конфигурации $\tilde{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{D}_k' = \tilde{\mathbf{q}} \times \mathbf{D}_k$$

и вычислим второй вектор деформации

$$\mathbf{P}' \equiv (\mathbf{D}_k \otimes \mathbf{d}_k)' = (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}) \times \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} = \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}. \tag{5.5}$$

Для энергетического вектора имеем аналогичное представление

$$\mathbf{\Phi}_\times = \mathbf{P}^\mathsf{T} \cdot \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}.$$

Векторы $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Phi}_\times$ называют векторами изгиба-кручения. Из формулы (5.5) видим, что вектор изгиба-кручения связан с изменением вектора Дарбу оснащения в процессе движения стержня. Однако интуитивно понятие изгиба связано с изгибом несущей кривой, и потому желательно истолковать вектор изгиба-кручения в терминах изгиба-кручения несущей кривой. Это возможно сделать, но только приближенно. Ранее отмечалось, что деформации растяжения и сдвига часто пренебрежимо малы, т. е. приемлемо допущение (5.4). Выясним смысл вектора изгиба-кручения при принятии этого допущения. Опуская все вычисления, приведем только окончательное выражение для энергетического вектора изгиба-кручения

$$\mathbf{\Phi}_\times = \left[\left(\tilde{\varphi}' - \varphi' + \left(\frac{1}{\tilde{\mathsf{R}}_t} - \frac{1}{\mathsf{R}_t}\right)\right)\mathbf{t} - \left(\frac{\cos(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\tilde{\mathsf{R}}_c} - \frac{1}{\mathsf{R}_c}\right)\mathbf{b} - \frac{\sin(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\tilde{\mathsf{R}}_c}\mathbf{n}\right]. \tag{5.6}$$

В этом выражении величины без тильд относятся к отсчетной (недеформированной) конфигурации стержня. Величины с тильдами относятся к деформированной конфигурации стержня. Теперь уже понятен смысл термина “вектор изгиба-кручения”, ибо он содержит только те величины, которые имеют ясное истолкование: радиусы кривизны R_c и $\tilde{\mathsf{R}}_c$, радиусы кручения R_t и $\tilde{\mathsf{R}}_t$, углы крутки φ и $\tilde{\varphi}$. Представление для вектора изгиба-кручения (5.6) является точным для нерастяжимого стержня (5.4), но для интуитивных рассуждений оно пригодно и в тех случаях, когда $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times \neq \mathbf{0}$, но мал по модулю.

6. Основные варианты теории тонких стержней

Выше была представлена наиболее общая динамическая теория тонких стержней с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига. Обобщить эту теорию можно только путем отказа от допущения, что напряженное состояние в стержне описывается усилиями и моментами. Иными словами, для обобщений необходимо вводить в рассмотрение сверхстатические факторы. С практической точки зрения интерес представляют не обобщенные и усложненные теории, а, напротив, по возможности упрощенные теории. С формальной точки зрения получение упрощенных теорий из представленной выше теории не вызывает затруднений. Проблема при этом состоит только в пределах применимости упрощенных теорий. К сожалению, общих критериев применимости упрощенных теорий не существует, ибо многое здесь определяется конкретным строением рассматриваемого стержня. Например, для тонких стержней, выполненных из однородного материала типа стали, как правило, можно пренебречь инерцией вращения и деформацией поперечного сдвига. Однако для тонких стержней с малой жесткостью на поперечный сдвиг подобные упрощения недопустимы. Короче говоря, использование упрощенных теорий требует от исследователя немалого опыта и хорошо развитой интуиции. Представленная выше теория обладает громадной областью применимости. Автору не известны случаи, когда она приводила бы к существенным ошибкам, даже в заведомо сомнительных для теории стержней случаях. Тем не менее рекомендовать ее для употребления во всех случаях часто равносильно рекомендации стрелять из пушек по воробьям. В связи с этим ниже рассмотрим основные упрощенные варианты.

Пренебрежимо малое сопротивление изгибу. Канаты и цепи. Для канатов (нитей) необходимо принять, что тензоры инерции $\mathbf{\Theta}_1$ и $\mathbf{\Theta}_2$ равны нулю и, кроме того, погонный момент $\mathfrak{L}$ также равен нулю. Нити не сопротивляются изгибу и не могут создавать моменты. Цепи отличаются от канатов тем, что для них иногда нужно учитывать инерцию вращения, т. е. $\mathbf{\Theta}_1 = \mathbf{0}$, но $\mathbf{\Theta}_2 \neq \mathbf{0}$. Для нитей можно воспользоваться общей теорией с соответствующими упрощениями, но проще вернуться к исходным уравнениям. Второй закон динамики (3.2) для нитей принимает вид

$$\mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \lambda \mathbf{R}' = [\lambda_e(\varepsilon) + \lambda_d(\varepsilon,\, \dot{\varepsilon})]\,(1+\varepsilon)\tilde{\mathbf{t}},$$

где $\tilde{\mathbf{t}}$ есть единичная касательная к деформированной нити.

Используя это выражение и учитывая, что в нитях $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, уравнение баланса энергии (3.3) переписываем в форме

$$\rho_0\dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{V}' + h' + \rho_0\mathcal{Q} = \lambda\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}'^{\cdot} + h' + \rho_0\mathcal{Q} = \lambda\,(1+\varepsilon)\dot{\varepsilon} + h' + \rho_0\mathcal{Q}.$$

Вводя в рассмотрение энтропию, выписываем приведенное уравнение баланса энергии и уравнение теплопроводности

$$\rho_0\dot{\mathcal{U}} = \lambda_e(\varepsilon)(1+\varepsilon)\dot{\varepsilon} + \vartheta\dot{\eta}, \quad \vartheta\dot{\eta} = h' + \rho_0\mathcal{Q} + \lambda_d(\varepsilon,\,\dot{\varepsilon})(1+\varepsilon)\dot{\varepsilon}. \tag{6.1}$$

Первое из уравнений (6.1) показывает, что внутренняя энергия для нити зависит только от двух скалярных аргументов: относительного удлинения нити ε и энтропии η. Кроме того, из него вытекают соотношения Коши–Грина

$$\lambda_e(\varepsilon,\eta) = \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}(\varepsilon,\eta)}{\partial\varepsilon}, \quad \vartheta(\varepsilon,\eta) = \frac{\partial\rho_0\mathcal{U}(\varepsilon,\eta)}{\partial\eta}.$$

Динамические задачи для нитей существенно нелинейны и потому достаточно сложны, поскольку нити работают только на растяжение. Тепловые эффекты важно учитывать, главным образом, для полимерных нитей. Укажем возможный вид внутренней энергии для изотермических процессов

$$\rho_0\mathcal{U}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\lambda_0\theta(\varepsilon)\varepsilon^2, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases},$$

где $\lambda_0 > 0$ есть жесткость нити на растяжение.

В статике поведение канатов и цепей неразличимо, но в динамике они ведут себя по-разному. Динамика цепей, видимо, исследована мало. Вообще, канаты и цепи составляют отдельный и весьма сложный для анализа раздел механики и традиционно в теории стержней не рассматривается.

Гибкие нерастяжимые стержни. В этом случае пренебрегается инерцией вращения, т. е. тензоры инерции $\mathbf{\Theta}_1$ и $\mathbf{\Theta}_2$ равны нулю. Кроме того, принимается условие (5.4).

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P}\cdot\mathbf{t}. \tag{6.2}$$

Принятие этой гипотезы меняет уравнение (4.6) и превращает его в следующее:

$$\left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\mathbf{\Phi}} - \mathbf{M}_e\right)\cdot\left(\dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{\Phi}\right) + \left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\eta} - \vartheta\right)\dot{\eta} = 0.$$

Из этого соотношения видим, что вектор усилия $\mathbf{N}_e(s,t)$ в него не входит и, следовательно, усилие в рассматриваемой теории не определяется соотношениями Коши–Грина, хотя для моментов и температур они сохраняются

$$\mathbf{M}_e = \frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\mathbf{\Phi}}, \quad \vartheta = \frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\eta}.$$

Что касается усилия $\mathbf{N}_e(s,t)$, то оно определяется по уравнениям движения. В этом варианте теории гибких стержней вектор изгиба-кручения может быть представлен в специальной форме, полученной Пуассоном и вытекающей после дифференцирования (6.2)

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}')\mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Этот вариант теории детально анализировался в статике при действии только краевых воздействий, т. е. при $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbf{0}$. Если вектор момента является линейной функцией вектора изгиба-кручения, то появляются дополнительные интегралы, хотя теория остается существенно нелинейной.

Классическая теория стержней. В классической теории пренебрегается инерцией вращения, т. е. тензоры инерции $\mathbf{\Theta}_1$ и $\mathbf{\Theta}_2$ равны нулю. Кроме того, принимается условие (5.3).

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \varepsilon\, \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = (1+\varepsilon)\mathbf{P} \cdot \mathbf{t}.$$

Приведенное уравнение баланса энергии (4.6) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon} - \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}\right)\dot{\varepsilon} + \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{\Phi}} - \mathbf{M}_e\right) \cdot \left(\dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Phi}\right) + \\ + \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \eta} - \vartheta\right)\dot{\eta} = 0 \quad \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}\right).$$

Из этого соотношения видим, что

$$\mathbf{N}_e = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon}\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \mathbf{M}_e = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{\Phi}}, \quad \vartheta = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \eta}. \tag{6.3}$$

Первое слагаемое в правой части выражения, определяющего вектор упругого усилия $\mathbf{N}_e$, есть растягивающее усилие в стержне. Вектор $\mathbf{Q}$ называется вектором перерезывающих сил и определяется уравнениями движения.

Линейная теория стержней. Представим основные соотношения геометрически линейной теории, т. е. деформации, смещения и повороты будем считать малыми, а внутренняя энергия останется произвольной. Но начнем с рассмотрения более общего случая, когда на малые смещения и повороты накладываются жесткие смещения стержня. Задачи такого рода возникают, например, при столкновении (ударе) стержней.

Итак, движение стержня зададим следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(s,t)]\,, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(t) \cdot [\mathbf{E} + \boldsymbol{\psi}(s,t) \times \mathbf{E}]\,, \tag{6.4}$$

где $\mathbf{u}(s,t)$ и $\boldsymbol{\psi}(s,t)$ суть малые векторы; $\mathbf{r}_0$ — положение некоторой фиксированной точки несущей кривой в отсчетной конфигурации; $\mathbf{c}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ суть заданные вектор и тензор поворота, зависящие только от времени.

Если векторы $\mathbf{u}(s,t)$ и $\boldsymbol{\psi}(s,t)$ равны нулю, то стержень совершает жесткое движение. Теорию, в которой удерживаются только линейные по $\mathbf{u}(s,t)$ и $\boldsymbol{\psi}(s,t)$ слагаемые, принято называть линейной. С точностью до членов второго порядка малости для векторов деформации получаем следующие выражения:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\kappa} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times = \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\Phi}_\times = \boldsymbol{\kappa},$$

где векторы

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{u}' + \mathbf{t}\times\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\psi}' \tag{6.5}$$

называются линейными векторами деформации. Дифференцируя (6.4) по времени, получаем скорости

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{c}}(t) + \boldsymbol{\omega}_0(t)\times\mathbf{Q}\cdot[\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}] + \mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\omega}(s,t) = \boldsymbol{\omega}_0(t) + \mathbf{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{\psi}},$$

где $\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{Q}$.

Для тензоров инерции в актуальной конфигурации имеем представления

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1 + \boldsymbol{\psi}\times\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1 - \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1\times\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\Theta}_2 = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2 + \boldsymbol{\psi}\times\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2 - \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2\times\boldsymbol{\psi},$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1 = \mathbf{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}_1^0\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(t), \quad \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2 = \mathbf{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Theta}_2^0\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(t).$$

Наконец, приведенное уравнение баланса энергии (4.6) принимает вид

$$\left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\mathbf{e}} - \mathbf{N}_e\cdot\mathbf{Q}\right)\cdot\dot{\mathbf{e}} + \left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\kappa}} - \mathbf{M}_e\cdot\mathbf{Q}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \left(\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\eta} - \vartheta\right)\dot{\eta} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{N}_e = \mathbf{Q}\cdot\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\mathbf{e}}, \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{Q}\cdot\frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\kappa}}, \quad \vartheta = \frac{\partial\rho_0\mathcal{U}}{\partial\eta}. \tag{6.6}$$

Представленные выше формулы полезны при решении многих задач, но проводить дальнейшие рассуждения на этом уровне общности нецелесообразно. В конкретных задачах всегда имеются те или иные особенности, позволяющие сделать окончательные вычисления более компактными, поэтому уравнения движения ниже будут записаны для действительно линейной теории, в которой принимается

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times = \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_\times = \boldsymbol{\kappa}.$$

Уравнения движения в линейной теории немного упрощаются

$$\mathbf{N}'(s,t) + \rho_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}(s,t) = \rho_0 \left(\ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Theta}_1^{(0)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}} \right), \tag{6.7}$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{N} + \rho_0 \boldsymbol{\mathcal{L}} = \rho_0 \left(\ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_1^{(0)} + \boldsymbol{\Theta}_2^{(0)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}} \right). \tag{6.8}$$

При анализе низкочастотных колебаний допустимо пренебрегать инерцией вращения, т. е. принимать $\boldsymbol{\Theta}_1^{(0)} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\Theta}_1^{(0)} = \mathbf{0}$. В линейной теории векторы усилий и моментов в стержнях являются интегральными характеристиками тензора напряжений трехмерной теории

$$\mathbf{N} = \int\limits_{(F)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} dx dy, \quad \mathbf{M} = \int\limits_{(F)} \mathbf{a} \times (\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}) dx dy, \tag{6.9}$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathsf{T}}$ есть тензор напряжений Коши.

Таковы основные варианты используемых теорий стержней. Дальнейшее продвижение невозможно без задания внутренней энергии.

7. Простейшая форма внутренней энергии

Чтобы не загромождать изложение, ниже будут рассматриваться изотермические процессы при отсутствии диссипации. Для внутренней энергии примем следующую аппроксимацию:

$$\begin{gathered}\rho_0 \mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times, \boldsymbol{\Phi}_\times) = \mathcal{U}_0 + \mathbf{N}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times + \mathbf{M}_0 \cdot \boldsymbol{\Phi}_\times + \\ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times + \boldsymbol{\mathcal{E}}_\times \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Phi}_\times + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}_\times \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Phi}_\times + \boldsymbol{\Phi}_\times \cdot (\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times \cdot \mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\Phi}_\times,\end{gathered} \tag{7.1}$$

где векторы $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{M}_0$, тензоры второго ранга $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и тензор третьего ранга $\mathbf{D}$ определены в отсчетной конфигурации, не зависят от деформации стержня и называются тензорами упругости.

В представлении (7.1) удержаны не все слагаемые третьего порядка. Полный анализ кубических слагаемых несложен, но требует значительного объема. Основной факт здесь заключается в том, что для стержней, поперечные сечения которых имеют две плоскости симметрии, кубическое по $\boldsymbol{\Phi}_\times$ слагаемое отсутствует. Удержание линейного по $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и квадратичного по $\boldsymbol{\Phi}_\times$ слагаемого связано с необходимостью учета эффекта Пойнтинга в стержнях. Полный учет кубических слагаемых нецелесообразен еще и потому, что отсутствуют данные по определению входящих в них модулей упругости. Линейные по $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и $\boldsymbol{\Phi}_\times$ слагаемые обычно игнорируются, что иногда ведет к недоразумениям. Действительно, как правило, эти слагаемые малы и могут игнорироваться, но в общем случае их удержание необходимо. Рассмотрим, например, прямолинейный стержень с круговым поперечным сечением, торцы которого стеснены вертикальными стенками без трения. Допустим, что этот стержень нагружен сжимающим нормальным давлением. В этом случае легко убедиться, что векторы деформации $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$ и $\boldsymbol{\Phi}_\times$ равны нулю, но продольная сила в стержне при этом отлична от нуля.

Представление (7.1) удобнее переписать в терминах векторов деформации $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathcal{U}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times, \boldsymbol{\Phi}_\times) = \mathcal{U}_0 + \tilde{\mathbf{N}}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + \tilde{\mathbf{M}}_0 \cdot \boldsymbol{\Phi} + \\ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}) \cdot \boldsymbol{\Phi}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где величины с тильдами

$$(\tilde{\mathbf{N}}_0, \tilde{\mathbf{M}}_0) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0), \quad (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \overset{3}{\underset{1}{\otimes}} \mathbf{P} \odot \mathbf{D}$$

определены в актуальной конфигурации.

Здесь использовано обозначение для тензора $\mathbf{S}$ ранга k

$$\overset{k}{\underset{1}{\otimes}} \mathbf{P} \odot \mathbf{S} \equiv \overset{k}{\underset{1}{\otimes}} \mathbf{P} \odot \left(S^{i_1 \ldots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_k} \right) \equiv S^{i_1 \ldots i_k} \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{i_k}.$$

Чтобы установить вид тензоров упругости, необходимо воспользоваться теорией симметрии тензоров. Но классическая теория симметрии применима только в неориентированных пространствах, и в рассматриваемом случае ее следует распространить на ориентированные пространства [5, 7]. Включение в теорию таких понятий, как вектор поворота, угловая скорость, вектор момента и так далее, требует введения ориентированного пространства, в котором определены объекты двух типов: полярные и аксиальные объекты. В теории стержней трехмерное ориентированное пространство разложено на прямую сумму одномерного пространства, натянутого на вектор единичной касательной $\mathbf{t}$, и двумерного пространства, ортогонального $\mathbf{t}$. В таком расслоенном пространстве можно ввести, в общем случае, три независимых ориентации. Однако для наших целей достаточно ограничиться двумя независимыми ориентациями: ориентацией трехмерного пространства и ориентацией одномерного подпространства. Трехмерное ориентированное пространство будем обозначать символом $\mathsf{E}_3^{(o)}$, а одномерное пространство, натянутое на $\mathbf{t}$, — символом $\mathsf{E}_1^{(o)}$. Ориентацию на двумерном пространстве будем определять из условия согласования $\mathsf{E}_3^{(o)} = \mathsf{E}_1^{(o)} \oplus \mathsf{E}_2^{(o)}$.

Определение: *объекты, не зависящие от выбора ориентации* $\mathsf{E}_3^{(o)}$ *и* $\mathsf{E}_1^{(o)}$*, называются полярными; объекты, зависящие от ориентации* $\mathsf{E}_3^{(o)}$ *и не зависящие от ориентации* $\mathsf{E}_1^{(o)}$*, называются аксиальными; объекты, не зависящие от выбора ориентации* $\mathsf{E}_3^{(o)}$*, но зависящие от ориентации* $\mathsf{E}_1^{(o)}$*, называются полярными* t*-ориентированными; объекты, зависящие от ориентации, как в* $\mathsf{E}_3^{(o)}$*, так и в* $\mathsf{E}_1^{(o)}$*, называются аксиальными* t*-ориентированными.*

В рассматриваемой теории объекты: ρ_0, ϑ, η, $\mathcal{U}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, $\mathbf{a}_c$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{P}$, $\boldsymbol{\Theta}_2$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ являются полярными; R_t, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $\boldsymbol{\Theta}_1$, $\mathbf{B}$ — аксиальными; R_c, $\mathbf{N}_0, \mathbf{N}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\times$, $\mathbf{D}$ — полярными t-ориентированными; $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}$, $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Phi}_\times$ — аксиальными t-ориентированными. Заметим, что дифференцирование по дуге несущей кривой меняет тип объекта. Например, вектор $\mathbf{N}'$ является полярным.

В определение группы симметрии тензора входит определение ортогонального преобразования тензора, которое зависит от типа этого тензора.

Определение: *ортогональным преобразованием тензора* k*-го ранга* $\mathbf{S}$ *называется тензор* $\mathbf{S}'$*, определяемый по формуле*

$$\mathbf{S}' \equiv (\mathbf{t}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{t})^{\beta}(\det\,\mathbf{Q})^{\alpha} \overset{k}{\underset{1}{\otimes}} \mathbf{Q}\odot\mathbf{S}, \tag{7.3}$$

где $\alpha = 0$, $\beta = 0$*, если* $\mathbf{S}$ *полярен;* $\alpha = 1$, $\beta = 0$*, если* $\mathbf{S}$ *аксиален;* $\alpha = 0$, $\beta = 1$*, если* $\mathbf{S}$ *полярен* t*-ориентирован;* $\alpha = 1$, $\beta = 1$*, если* $\mathbf{S}$ *аксиален* t*-ориентирован.*

Определение: *группой симметрии тензора* $\mathbf{S}$ *называется множество ортогональных тензоров, не меняющих вида тензора* $\mathbf{S}$*, т. е. множество ортогональных решений уравнения*

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}, \tag{7.4}$$

где $\mathbf{S}$ *задан, а ищутся ортогональные тензоры* $\mathbf{Q}$*, причем ортогональное преобразование* $\mathbf{S}'$ *определено посредством формулы (7.3).*

При определении структуры тензоров упругости, помимо их типа, необходимо учитывать следующие обстоятельства. Во-первых, они зависят от анизотропии материала, из которого изготовлен стержень, и от распределения этого материала по сечению стержня. Далее будет предполагаться, что эти факторы таковы, что они не нарушают симметрии поперечного сечения. Во-вторых, тензоры упругости зависят от геометрии несущей кривой, т. е. от ее вектора Дарбу $\boldsymbol{\tau}$, и от наличия естественной крутки стержня, т. е. от вектора Дарбу оснащения $\mathbf{q}$. Поскольку эти векторы связаны соотношением (1.6), то можно считать, что тензоры упругости зависят от $\boldsymbol{\tau}$ и от интенсивности угла крутки φ'. Указанные обстоятельства не позволяют определить тензоры упругости экспериментальными методами, поскольку эксперименты проводятся с конкретными стержнями и, следовательно, определяют тензоры упругости только для этого конкретного стержня. В-третьих, рассматриваются тонкие стержни. Поэтому, если в качестве единицы длины принять наибольший диаметр поперечного стержня, то модуль вектора $\boldsymbol{\tau}$ будет малой величиной.

Прежде чем двигаться дальше, выберем систему координат в поперечном сечении так, что выполняются соотношения

$$\int\limits_{(F)} x\tilde{\rho}dxdy = \int\limits_{(F)} y\tilde{\rho}dxdy = \int\limits_{(F)} xy\tilde{\rho}dxdy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{(F)} \mathbf{a}\tilde{\rho}dxdy = \mathbf{0}. \tag{7.5}$$

Условие (7.5) налагает, конечно, некоторое ограничение на функцию $\tilde{\rho}$ и означает, что несущая кривая проходит через центры инерции сечения.

Установим группы симметрии тензоров инерции $\rho_0\boldsymbol{\Theta}_1^0$ и $\rho_0\boldsymbol{\Theta}_2^0$, определенных формулами (2.2) и (2.4), соответственно. Тензор $\rho_0\boldsymbol{\Theta}_2^0$ является полярным. Его группа симметрии находится как решения уравнения

$$\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Theta}_2^0\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\Theta}_2^0.$$

Видим, что, в общем случае, к группе симметрии $\rho_0\boldsymbol{\Theta}_2^0$ принадлежат только следующие тензоры:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_1, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_2, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}. \tag{7.6}$$

Тензор $\rho_0\boldsymbol{\Theta}_1^0$ является аксиальным, и его группа симметрии с учетом представления (2.2) находится из уравнения

$$\det\mathbf{Q}\;\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{d})\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}\times\mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{d},$$

т. е. группа симметрии первого тензора инерции совпадает с группой симметрии вектора $\mathbf{d}$, которая состоит из поворотов вокруг $\mathbf{d}$ и зеркальных отражений

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}, \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{d} = 0.$$

Видим, что группа симметрии тензора инерции $\rho_0\boldsymbol{\Theta}_1^0$ не включает в себя группу симметрии (7.6) первого тензора инерции. Это связано с влиянием вектора Дарбу несущей кривой. Представим вектор $\mathbf{d}$ в другой форме

$$\mathbf{d} = \int\limits_{(F)} \mathbf{a}\tilde{\rho}\mu\,dxdy = \int\limits_{(F)} \mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\times\mathbf{t}\tilde{\rho}dxdy\cdot\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\tau},$$

где

$$\mathbf{S} \equiv \int\limits_{(F)} \left(-x^2 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d_2} + y^2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d_1}\right) \tilde{\rho} dx dy,$$

где было использовано условие (7.5).

Тензор $\mathbf{S}$ уже не зависит от геометрии несущей кривой и полностью определяется свойствами поперечного сечения стержня. Найдем его группу симметрии с учетом того, что он аксиален и $\mathbf{t}$-ориентирован

$$(\mathbf{t} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t})(\det \mathbf{Q})\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{S}.$$

Видим, что группу симметрии тензора $\mathbf{S}$ составляют всего два тензора зеркального отражения

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2. \tag{7.7}$$

Заметим, что эти тензоры не принадлежат к группе симметрии вектора $\mathbf{d}$. Кроме того, важно отметить тот факт, что зеркальное отражение от плоскости, нормальной к несущей линии, не входит в группу симметрии тензора $\mathbf{S}$. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы к группе симметрии всех встречающихся тензоров принадлежали тензоры (7.7). Если естественная крутка стержня отсутствует, то к группам симметрии будут принадлежать тензоры (7.6).

Итак, все входящие в энергию (7.1) тензоры упругости представим в виде разложения по вектору $\boldsymbol{\tau}$, определенному формулой (1.2),

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

причем ограничимся только первыми двумя членами разложения. Потребуем, чтобы тензоры (7.7) принадлежали к группе симметрии коэффициентов этого разложения. Коэффициенты $\mathbf{f}_0$ могут быть найдены из экспериментов с прямолинейными в недеформированном состоянии стержнями.

Используя приведенные выше определения симметрии и типов искомых тензоров, получаем следующие представления для тензоров упругости. Тензор упругости $\mathbf{A}$ полярен и симметричен. Представляя его в виде разложения

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

получаем, что тензор $\mathbf{A}_0$ является полярным, а тензор $\mathbf{A}_1$ — аксиален и $\mathbf{t}$-ориентирован. Будем считать, что тензоры (7.7) принадлежат к их группе симметрии. Тогда

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_3 + \frac{A_{12}}{R_t} \left(\mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_1 \right) + \\ + \frac{1}{R_c} \left[A_{13} \left(\mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_1 \right) \cos\alpha + A_{23} \left(\mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_2 \right) \sin\alpha \right], \quad (7.8)$$

где смысл угла α установлен формулами (4.9), $\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{t}$, $\mathbf{a} \, \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Если естественная крутка стержня отсутствует, то к группе симметрии тензоров $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1$ принадлежит зеркальное отражение $\mathbf{E} - 2\,\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$. В этом случае тензор $\mathbf{A}_1$ равен нулю и выражение (7.8) значительно упрощается.

Аналогичное представление имеет место для полярного тензора $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_3 + \frac{C_{12}}{R_t} \left(\mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_1 \right) + \\ + \frac{1}{R_c} \left[C_{13} \left(\mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_1 \right) \cos\alpha + C_{23} \left(\mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 \, \mathbf{d}_2 \right) \sin\alpha \right]. \quad (7.9)$$

Если естественная крутка отсутствует, то $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0$.

Аксиальный тензор $\mathbf{B}$ имеет другую структуру. Чтобы построить этот тензор, необходимо выполнить несколько операций. Сначала представляем $\mathbf{B}$ в виде разложения

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где $\mathbf{B}_0$ — аксиальный тензор второго ранга; $\mathbf{B}_1$ — $\mathbf{t}$-ориентированный тензор третьего ранга, для обоих тензоры (7.7) являются элементами симметрии.

Аксиальный тензор $\mathbf{B}_0$ отвечает за естественную крутку стержня. Кажется разумным потребовать, чтобы он линейно зависел от вектора $\varphi' \mathbf{t}$. В таком случае имеем

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_* \cdot \varphi' \mathbf{t} = \varphi' \left(B_{01} \mathbf{d}_1 \, \mathbf{d}_1 + B_{02} \mathbf{d}_2 \, \mathbf{d}_2 + B_{03} \mathbf{t} \, \mathbf{t} \right),$$

где B_{01}, B_{02}, B_{03} суть абсолютные скаляры, отвечающие за эффекты, связанные с естественной круткой стержня; φ' — аксиальный скаляр.

Интуиция подсказывает, что существенным является только модуль B_{03}, отвечающий за связанность растяжения и кручения. Модули B_{01} и B_{02} связывают деформации поперечного сдвига и изгиб несущей линии, их, видимо, можно игнорировать. Именно так мы и будем считать, т. е. тензор $\mathbf{B}_0$ примем в следующем виде:

$$\mathbf{B}_0 = \varphi' \, B_0 \, \mathbf{t} \, \mathbf{t}. \quad (7.10)$$

Видим, что для естественно закрученных стержней эффект Пойнтинга проявляется уже в линейной теории. Этот факт важен при анализе работы ударно-сверлильных машин.

Общий вид тензора $\mathbf{B}$ с учетом естественной закрутки имеет вид

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t}\left[B_1\mathbf{d}_1\mathbf{d}_1 + B_2\mathbf{d}_2\mathbf{d}_2 + B_3\mathbf{t}\,\mathbf{t} + \varphi'\left(b_1\mathbf{d}_1\mathbf{d}_1 + b_2\mathbf{d}_2\mathbf{d}_2\right)\times\mathbf{t}\right] +$$
$$+ \frac{1}{R_c}\left[\left(B_{13}\mathbf{d}_1\,\sin\alpha + B_{23}\mathbf{d}_2\,\cos\alpha\right)\mathbf{t} + \mathbf{t}\left(B_{31}\,\mathbf{d}_1\sin\alpha + B_{32}\mathbf{d}_2\cos\alpha\right)\right] +$$
$$+ \frac{\varphi'}{R_c}\left[\left(b_{13}\mathbf{d}_1\cos\alpha + b_{23}\mathbf{d}_2\sin\alpha\right)\mathbf{t} + \mathbf{t}\left(b_{31}\mathbf{d}_1\cos\alpha + b_{32}\mathbf{d}_2\sin\alpha\right)\right]. \quad (7.11)$$

Если естественная крутка стержня отсутствует, то $\varphi' = 0$. Если поперечное сечение стержня есть правильный многоугольник или круг, то можно немного упростить это выражение

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t}\left[B_1\left(\mathbf{E} - \mathbf{t}\mathbf{t}\right) + B_3\mathbf{t}\,\mathbf{t} + \varphi' b_1\mathbf{E}\times\mathbf{t}\right] +$$
$$+ \frac{1}{R_c}\left[B_{13}\left(\mathbf{d}_1\,\sin\alpha + \mathbf{d}_2\,\cos\alpha\right)\mathbf{t} + B_{31}\,\mathbf{t}\left(\mathbf{d}_1\sin\alpha + \mathbf{d}_2\cos\alpha\right)\right] +$$
$$+ \frac{\varphi'}{R_c}\left[b_{13}\left(\mathbf{d}_1\cos\alpha + \mathbf{d}_2\sin\alpha\right)\mathbf{t} + b_{31}\,\mathbf{t}\left(\mathbf{d}_1\cos\alpha + \mathbf{d}_2\sin\alpha\right)\right].$$

Кроме того, для круглого сечения модули B_0, b_1, b_2, b_{13}, b_{31}, b_{23}, b_{32} должны равняться нулю, поскольку повернутое сечение в этом случае не отличается от неповернутого. Учитывая это обстоятельство и вспоминая выражения (4.9), последнее представление переписываем в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_t}\left[B_1\left(\mathbf{E} - \mathbf{t}\mathbf{t}\right) + B_3\mathbf{t}\,\mathbf{t}\right] + \frac{1}{R_c}\left[B_{13}\mathbf{b}\mathbf{t} + B_{31}\,\mathbf{t}\mathbf{b}\right], \quad (7.12)$$

где следует обратить внимание на то, что вектор бинормали $\mathbf{b}$ аксиален.

Выпишем свертку тензора $\mathbf{B}$ с вектором деформации растяжения-сдвига

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\mathbf{B} = \varphi' B_0\,\epsilon\mathbf{t} + \frac{1}{R_t}\left[B_1\Gamma_1\mathbf{d}_1 + B_2\Gamma_2\mathbf{d}_2 + B_3\epsilon\,\mathbf{t} + \varphi'\left(b_1\Gamma_1\mathbf{d}_1 + b_2\Gamma_2\mathbf{d}_2\right)\times\mathbf{t}\right] +$$
$$+ \frac{1}{R_c}\left[\left(B_{13}\Gamma_1\,\sin\alpha + B_{23}\Gamma_2\,\cos\alpha\right)\mathbf{t} + \epsilon\left(B_{31}\,\mathbf{d}_1\sin\alpha + B_{32}\mathbf{d}_2\cos\alpha\right)\right] +$$
$$+ \frac{\varphi'}{R_c}\left[\left(b_{13}\Gamma_1\cos\alpha + b_{23}\Gamma_2\sin\alpha\right)\mathbf{t} + \epsilon\left(b_{31}\mathbf{d}_1\cos\alpha + b_{32}\mathbf{d}_2\sin\alpha\right)\right], \quad (7.13)$$

где использованы обозначения (5.1).

Поскольку деформации поперечного сдвига, как правило, малы, то при отсутствии естественной крутки, видимо, имеют значение только модули B_3, B_{31}, B_{32}. Нетрудно установить общий вид $\mathbf{t}$-ориентированного тензора $\mathbf{D}$, но в этом нет особой необходимости. Мы ограничимся той его частью, которая не зависит от вектора Дарбу несущей кривой

$$\mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{D} = \epsilon \left(\mathsf{D}_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + \mathsf{D}_2 \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + \mathsf{D}_3 \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_3\right) + \\ + \Gamma_1 \mathsf{D}_{13} \left(\mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_1\right) + \Gamma_2 \mathsf{D}_{23} \left(\mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_2\right),$$

где использованы обозначения (5.1).

Кубические члены в энергии, если и имеют значение, то только при очень больших поворотах, либо для эластомеров. При больших поворотах тонкого металлического стержня деформации поперечного сдвига пренебрежимо малы. Поэтому предыдущее выражение допустимо принимать в упрощенном виде

$$\mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{D} = \epsilon \left(\mathsf{D}_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + \mathsf{D}_2 \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + \mathsf{D}_3 \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_3\right). \tag{7.14}$$

Простейшая теория стержней без естественной крутки, описывающая эффект Пойнтинга, получается при следующих значениях модулей

$$\mathsf{D}_1 = \mathsf{D}_2 = 0, \quad \mathsf{D}_3 = \mathsf{C}_3,$$

где C_3 есть жесткость стержня на кручение.

При дальнейшем анализе кубические члены в энергии будем игнорировать, поскольку в настоящее время необходимость их учета не вполне ясна. Величины $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_{23}$; $\mathsf{C}_1, \ldots \mathsf{C}_{23}$ и так далее называются упругими модулями и зависят только от упругих постоянных материала, распределения материала по сечению стержня, формы и размеров поперечного сечения.

Представленная выше технология не пригодна для нахождения векторов $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$, которые, в отличие от тензоров упругости, характеризуют не только свойства стержня, но и внешние нагрузки, действующие на боковую поверхность стержня. Можно утверждать, что они линейно зависят от внешних нагрузок. Как правило, их влияние пренебрежимо мало. Однако их игнорирование может привести к недоразумениям при определении значений упругих модулей.

8. Определение упругих модулей

Естественно закрученные стержни встречаются относительно редко. Поэтому вначале будем считать, что естественная крутка отсутствует. Кроме того, отбросим кубические члены в энергии. В таком случае тензоры упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ принимают относительно простой вид

$$\mathbf{A} = \mathsf{A}_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + \mathsf{A}_2 \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + \mathsf{A}_3 \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{C} = \mathsf{C}_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + \mathsf{C}_2 \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2 + \mathsf{C}_3 \mathbf{d}_3\, \mathbf{d}_3. \tag{8.1}$$

Тензоры упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ могут быть найдены из экспериментов с прямолинейными стержнями. Тензор упругости $\mathbf{B}$ тоже упрощается, но незначительно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_t}\left(B_1\mathbf{d}_1\,\mathbf{d}_1 + B_2\mathbf{d}_2\,\mathbf{d}_2 + B_3\mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_3\right) + \\ + \frac{1}{R_c}\left[\left(B_{23}\mathbf{d}_2\,\mathbf{d}_3 + B_{32}\mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_2\right)\cos\alpha + \left(B_{13}\mathbf{d}_1\,\mathbf{d}_3 + B_{31}\mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_1\right)\sin\alpha\right]. \quad (8.2)$$

Заметного упрощения можно добиться только для стержней, сечение которых есть правильный многоугольник или круг, поскольку в этом случае для коэффициентов разложений тензоров упругости по вектору Дарбу появляется дополнительный элемент симметрии, а именно поворот вокруг вектора $\mathbf{t} = \mathbf{d}_3$. Иными словами, к группе симметрии добавляется тензор

$$\mathbf{Q} = \left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n}\right)\mathbf{t}\,\mathbf{t} + \cos\frac{2\pi k}{n}\mathbf{E} + \sin\frac{2\pi k}{n}\mathbf{t}\times\mathbf{E},$$

где n есть число вершин многоугольника; k — произвольное целое число.

В этом случае для тензоров упругости имеем представления

$$\mathbf{A} = A_1\left(\mathbf{E} - \mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_3\right) + A_3\mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_3, \quad \mathbf{C} = C_1\left(\mathbf{E} - \mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_3\right) + C_3\mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_3. \quad (8.3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1\cdot\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{R_t}\left[B_1\left(\mathbf{E} - \mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_3\right) + B_3\mathbf{d}_3\,\mathbf{d}_3\right] + \frac{1}{R_c}\left(B_{13}\mathbf{b}\,\mathbf{t} + B_{31}\mathbf{t}\,\mathbf{b}\right). \quad (8.4)$$

Тензоры второго ранга $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ трансверсально изотропны. Тензор $\mathbf{B}$ таковым не является, а трансверсально изотропным является тензор третьего ранга $\mathbf{B}_1$.

Поскольку тензоры упругости $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ не зависят от деформации, они могут быть найдены по данным линейной теории. Модули A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3 могут быть определены по экспериментам с прямолинейными стержнями. Модули B_{13}, B_{31}, B_{23}, B_{32} могут быть найдены по экспериментам с плоскими искривленными стержнями. Модули B_1, B_2, B_3 могут быть найдены только по экспериментам с пространственно искривленными стержнями. Основное затруднение при определении упругих модулей связано с тем, что они зависят от формы поперечного сечения стержня. Частично задача по определению упругих модулей стержней уже решена. В частности, для однородных стержней из изотропного материала определены жесткости стержня на растяжение A_3 и поперечный сдвиг — модули A_1 и A_2

$$A_3 = E\,F, \quad A_1 = k_1\,G\,F, \quad A_2 = k_2\,G\,F, \quad (8.5)$$

где E — модуль Юнга; $G = E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига материала стержня.

Безразмерные коэффициенты k_1 и k_2 в выражениях (8.5) называются коэффициентами поперечного сдвига и, в принципе, зависят от формы поперечного сечения. При определении модулей упругости следует иметь в виду, что они являются физическими характеристиками стержня. Поэтому их следует определять через некие физические характеристики, не зависящие от того, рассматриваем ли мы данное тело как трехмерное или как одномерное (стержень). Наиболее подходящими характеристиками такого рода являются низшие собственные частоты, которые легко измеряются экспериментально. Можно использовать и мысленные (численные) эксперименты. Собственные частоты можно найти по трехмерной теории упругости, которая позволяет определять частоты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. Собственные частоты можно найти и по теории стержней, они будут выражаться через модули упругости. Требуя совпадения собственных частот, найденных по разным теориям, получаем условия, из которых определяются упругие модули. Проиллюстрируем сказанное на примере определения коэффициентов поперечного сдвига.

Рассмотрим следующую динамическую задачу. Призматическое тело занимает область: $-h/2 \le x \le h/2$, $-H/2 \le y \le H/2$, $0 \le z \le l$. Оси декартовой системы координат выберем так что $\mathbf{i} = \mathbf{d}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{d}_2$, $\mathbf{k} = \mathbf{t}$. Пусть боковая поверхность призмы свободна от напряжений, а на торцах заданы следующие условия:

$$z = 0,\, l: \quad \mathbf{u}_{(3)} \cdot \mathbf{d}_1 = \mathbf{u}_{(3)} \cdot \mathbf{d}_2 = 0, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

где $\mathbf{u}_{(3)}$ и $\mathbf{T}$ суть вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерной среде, соответственно.

Рассмотрим сдвиговые колебания призмы следующего вида:

$$\mathbf{u}_{(3)} = W e^{i\omega t} \sin \lambda x\, \mathbf{t}, \quad \mathbf{T} = G\lambda W e^{i\omega t} \cos \lambda x (\mathbf{t}\, \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1\, \mathbf{t}), \quad \lambda = (2k+1)\pi/h,$$

где ω — частоты собственных колебаний.

Эти выражения удовлетворяют краевым условиям. Осталось подчинить их уравнениям движения, из которых и находятся собственные частоты

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{u}}_{(3)} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{G}{\tilde{\rho}} \frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.6}$$

Рассмотрим эту же задачу с точки зрения теории стержней. Ей соответствуют следующие представления основных величин:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi_2 \mathbf{d}_2 = \mathrm{const}, \quad \mathbf{N} = N_1 \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{0}.$$

Векторы деформации (6.5) имеют вид

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{u}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi} = -\psi_2 \mathbf{d}_1, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\psi}' = \mathbf{0}.$$

Из соотношений Коши–Грина (6.6) получаем

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = -A_1 \psi_2 \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

Уравнения движения (6.7)–(6.8) для данной задачи имеют вид

$$\mathbf{N}'(s,t) = \mathbf{0}, \quad -A_1 \psi_2 \mathbf{d}_2 = \Theta_2 \ddot{\psi}_2 \mathbf{d}_2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{A_1}{\Theta_2}, \quad \Theta_2 = \tilde{\rho} F \frac{h^2}{12}, \tag{8.7}$$

где Θ_2 определено выражением (2.6).

Сравнивая частоты, найденные по трехмерной теории (8.6), и частоту, найденную по теории стержней (8.7), видим огромное различие. Трехмерная теория дает целый спектр сдвиговых колебаний, в то время как теория стержней дает всего одну частоту. Это и не удивительно, ибо область применимости трехмерной теории несоизмеримо больше области применимости теории стержней. Последняя может претендовать на хорошее описание только относительно низкочастотных колебаний. Заметим, что сдвиговые колебания — это уже высокочастотные колебания. Их частоты стремятся к бесконечности при $h \to 0$, в то время как частоты изгибных колебаний стержня стремятся к нулю при $h \to 0$, а частоты продольных колебаний ограничены при $h \to 0$. Поэтому вполне естественно, что теория стержней не позволяет описать весь сдвиговой спектр, но она может описать низшую частоту из спектра (8.6). Для этого достаточно принять

$$\frac{A_1}{\Theta_2} = \frac{G}{\tilde{\rho}} \frac{\pi^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{\pi^2}{12} GF \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Рассматривая сдвиговые колебания в другой плоскости, получаем, что $k_1 = k_2$. Таким образом, для стержней прямоугольного сечения коэффициенты поперечного сдвига определены и все жесткости в (8.5) выражены через известные характеристики. Кроме того, из сравнения (8.6) и (8.7) видим, что частотный диапазон, описываемый теорией стержней, заведомо ограничен сверху неравенством

$$\omega^2 < \frac{G}{\tilde{\rho}} \frac{9\pi^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad \omega < \frac{3\pi}{h} \sqrt{\frac{G}{\tilde{\rho}}}. \tag{8.8}$$

Для тонких стержней ограничение (8.8) является очень слабым, ибо типичные частоты колебаний стержневых систем заведомо удовлетворяют ограничению (8.8).

Полезно рассмотреть некий кажущийся парадокс, связанный с определением коэффициента поперечного сдвига. Попробуем определить его из точного решения статической задачи о чистом сдвиге призматического стержня, которое выражается формулами

$$\mathbf{T} = \tau\,(\mathbf{t}\,\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1\,\mathbf{t}), \quad \mathsf{G}\mathbf{u}_{(3)} = \tau\,x\,\mathbf{t}.$$

Используя формулы (2.7), связывающие смещения и повороты точек стержня с вектором перемещений частиц трехмерной среды, а также формулы (6.9), получаем

$$\mathbf{N} = \tau\,\mathsf{F}\,\mathbf{d}_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathsf{G}\,\boldsymbol{\psi} = -\tau\,\mathbf{d}_2.$$

С другой стороны, вектор усилий связан с вектором деформации посредством соотношений упругости

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{t}\times\boldsymbol{\psi}) \quad \Rightarrow \quad \tau\,\mathsf{F} = -\mathsf{A}_1\,\mathbf{d}_2\cdot\boldsymbol{\psi} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{k}_1 = 1. \qquad (8.9)$$

Таким образом рассчитывается значение коэффициента поперечного сдвига, которое отличается от полученного ранее (значения обоих — результат сравнений точных решений). С практической точки зрения это обстоятельство, как правило, несущественно, ибо влияние поперечного сдвига заметно сказывается далеко не во всех задачах. Например, переход от теории, учитывающей сдвиг, к классической теории стержней осуществляется посредством предельного перехода $\mathsf{k}_1,\ \mathsf{k}_2\ \to\ \infty$. Тем не менее с теоретической точки зрения этот факт неприятен, и хотелось бы понять причину подобного расхождения в определении коэффициента поперечного сдвига. Ответ прост: на самом деле никакого расхождения нет. Значение $\mathsf{k}_1 = 1$ было получено хотя и из точного решения, но некорректно. Следует еще раз обратиться к выражению для внутренней энергии (7.1). В него входят векторы $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$, относительно которых известно только то, что они являются линейными функционалами нагрузок, действующими на боковую поверхность стержня. К сожалению, в отличие от теории оболочек, в теории стержней общий вид этих функционалов пока не установлен. Ясно только то, что векторы $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$ отличны от нуля. Поэтому равенства (8.9) следовало записать в следующем виде:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + \mathbf{A}\cdot(\mathbf{t}\times\boldsymbol{\psi}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_0 = \tau\,\mathsf{F}\,(1-\mathsf{k}_1)\mathbf{d}_1.$$

Таким образом, задача о чистом сдвиге не позволяет вычислить коэффициент поперечного сдвига, но дает возможность установить вектор $\mathbf{N}_0$. В других задачах вид вектора $\mathbf{N}_0$ будет иным. Из всего сказанного следует общий вывод о том, что *модули упругости должны определяться из задач, в которых действуют только краевые, но не поверхностные, нагрузки.* С физической точки зрения этот вывод очевиден. Действительно, приложением поверхностных нагрузок можно вызвать в стержне какие угодно деформации. При этом свойства самого стержня отходят на второй план. При действии краевых нагрузок деформации стержня определяются его свойствами и ничем другим. Насколько важен учет векторов $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$ в практических задачах? Как правило, совершенно не важен, за исключением задач типа рассмотренной выше. Дело в том, что учет векторов $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$ определяет напряжения в стержне, которые остаются ограниченными при стремлении площади поперечного сечения к нулю. Однако напряжения, типичные для стержневых систем, при стремлении площади поперечного сечения к нулю стремятся к бесконечности. Иными словами, поправки, вносимые векторами $\mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M}_0$, как правило, пренебрежимо малы.

В теории оболочек удается доказать, что коэффициент поперечного сдвига лежит в интервале

$$\pi^2/12 \leq k < 1.$$

Аналогичный результат в теории стержней не доказан, но можно думать, что он остается справедливым. Отметим, что в теории пластин предложены различные значения коэффициента поперечного сдвига: $k = 5/6$ (Рейсснер Э., 1944), $k = \pi^2/12$ (Миндлин Р., 1951), $k = 5/(6-\nu)$ (Жилин П.А., 1983). Последнее значение рекомендуется в задачах с ярко выраженным изгибом. Например, при вычислении собственных частот изгибных колебаний стержня.

Обратимся к определению модулей C_3, C_1, C_2. Эти модули носят названия: C_3 — жесткость стержня на кручение, C_1 и C_2 — жесткости стержня на изгиб. Как уже отмечалось, они могут быть установлены в экспериментах с прямолинейными стержнями. Определение жесткостей прямолинейного незакрученного стержня — давно решенная проблема, но за деталями следует обратиться к специальной литературе. Проще всего находятся жесткости стержня на изгиб. Для стержней из однородного изотропного материала они определяются по формулам, установленным еще Г. Кирхгофом (1859)

$$C_1 = E\,J_1, \quad C_2 = E\,J_2, \quad J_1 \equiv \int\limits_{(F)} y^2 dx dy, \quad J_2 \equiv \int\limits_{(F)} x^2 dx dy, \tag{8.10}$$

где E — модуль Юнга материала стержня; J_1 и J_2 — моменты инерции поперечного сечения стержня.

Для неоднородных, например многослойных, стержней формулы для изгибных жесткостей меняются, но этот вопрос оставим в стороне. При решении прикладных задач теории стержней конкретный вид модулей упругости не имеет значения. Они важны только при определении величины, но не вида, напряжений, т. е. это важный, но сугубо прикладной аспект проблемы.

Явную формулу для жесткости стержня на кручение указать нельзя. Но методика ее определения хорошо разработана и приводится в справочниках [8]. В общем случае жесткость на кручение стержня с односвязным поперечным сечением определяется по формуле

$$C_3 = G\,J_r, \quad J_r = 2\int\limits_{(F)} U(x,y)dxdy, \quad \triangle U = -2, \quad U = 0 \text{ на } \partial F, \qquad (8.11)$$

где J_r есть так называемая геометрическая жесткость на кручение.

Например, для стержня эллиптического сечения имеем

$$U(x,y) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}G,$$

где a, b — полуоси эллипса.

Можно обосновать следующую оценку (Николаи Е.Л.):

$$C_3 = G\,J_r \le G\,\frac{4J_1J_2}{J_p}, \quad J_p \equiv \int (x^2+y^2)dxdy,$$

где J_p есть полярный момент инерции.

Знак равенства достигается для стержней эллиптического сечения. Максимальной жесткостью на кручение обладают стержни кругового сечения. Для многосвязных сечений приведенные выше формулы требуют небольшой модификации [8]. Отметим, что изложенную выше методику определения геометрической жесткости на кручение J_r разработал Барри де Сен-Венан (1879).

Обратимся к определению модулей, входящих в тензор $\mathbf{B}$. В известной автору литературе они не определены. Исключением является модуль B_0, который может быть найден и на самом деле определен из мысленных экспериментов с прямолинейными естественно закрученными стержнями. Чтобы яснее представить себе роль, которую играет модуль B_0, рассмотрим растяжение естественно закрученного прямолинейного стержня. Необходимыми условиями положительности энергии деформации в этом случае являются неравенства

$$A_i > 0, \quad C_i > 0, \quad A_3\, C_3 > \varphi'^2\, B_0^2.$$

Последнее из этих неравенств налагает ограничение на величину естественной крутки стержня. Поскольку модули могут быть найдены по линейной теории, то рассмотрим малые растяжения естественно закрученного стержня. Имеем очевидные равенства

$$\mathbf{u} = u\,\mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi\,\mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} = u'\,\mathbf{t} \equiv \varepsilon\,\mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \psi'\,\mathbf{t}.$$

По условиям статики и соотношениям упругости имеем

$$N\,\mathbf{t} = (A_3\,\varepsilon + \varphi'\,B_0\,\psi')\,\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = (\varepsilon\,\varphi'\,B_0 + C_3\,\psi')\,\mathbf{t} = \mathbf{0}.$$

Решая эту систему относительно ε и ψ', получаем

$$\varepsilon = \frac{C_3\,N}{A_3\,C_3 - \varphi'^2\,B_0^2} \quad \psi' = -\frac{N}{A_3\,C_3 - \varphi'^2\,B_0^2}\varphi'\,B_0 \quad \Rightarrow \quad B_0 > 0.$$

Последнее неравенство следует из физически очевидного требования, чтобы при растяжении стержень раскручивался. В литературе [8] предложена следующая формула для B_0:

$$B_0 = E\,(J_p - J_r) \geq 0, \tag{8.12}$$

причем знак равенства достигается только для стержней круглого сечения.

В существующих теориях стержней, не обладающих естественной круткой, принято, что $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. С прикладной точки зрения это, видимо, не ведет к существенной погрешности. Однако этот вопрос требует более тщательного анализа. Игнорирование тензора $\mathbf{B}$ интуитивно можно оправдать следующим образом. Массовая плотность внутренней энергии есть локальная характеристика стержня. Локально не слишком сильно изогнутые стержни почти не отличаются от прямолинейных стержней. Поэтому разумно допустить, что массовая плотность внутренней энергии стержня не зависит от кривизны и кручения несущей линии. С другой стороны, сравнения с немногими точными решениями трехмерной теории упругости не подтверждают допущения о возможности игнорирования тензора $\mathbf{B}$, особенно при определении перемещений. Поэтому определение тензора $\mathbf{B}$ представляется желательным или даже необходимым. Например, из представления (7.13) и равенства (4.11) вытекает следующее соотношение для модулей:

$$B_{32} = EJ_4 + B_{31}, \quad J_4 \equiv \int (x^2 - y^2)\,dx\,dy. \tag{8.13}$$

Поэтому принятие условия $B_{32} = B_{31} = 0$, вообще говоря, ведет к противоречию. Чтобы определить модуль B_{32}, достаточно рассмотреть задачу Ламе для полого цилиндра малой высоты H, нагруженного внутренним давлением [9]. Простые вычисления (см. п. 9) дают следующее значение модуля $B_{32} = C_2$. С учетом связи (8.13) окончательно получаем

$$B_{32} = C_2, \quad B_{31} = C_1.$$

К сожалению, об остальных модулях, входящих в тензор $\mathbf{B}$ в настоящее время нельзя сказать ничего определенного. Интуиция подсказывает, что для большинства практических потребностей вместо общего выражения (7.11) достаточно принять тензор $\mathbf{B}$ в следующем виде:

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t} B_3 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_c} \mathbf{t}\left(C_1\, \mathbf{d}_1 \sin\alpha + C_2 \mathbf{d}_2 \cos\alpha\right).$$

В другой записи этому представлению можно придать вид

$$\mathbf{B} = \varphi' B_0 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_t} B_3 \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \frac{1}{R_c} \mathbf{t} \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}. \tag{8.14}$$

Модуль B_3 здесь остался неопределенным, и сделать вывод о его роли можно только на основе решения ряда задач для пространственно изогнутых стержней. Этот вопрос требует более тщательного анализа.

9. Осесимметричная деформация кольца

Рассмотрим задачу Ламе [9] для полого цилиндра высотой H, нагруженного внутренним давлением p. Высоту цилиндра H считаем малой настолько, что напряженное состояние в нем можно считать плоским. Поэтому фактически можно рассматривать кольцевую пластину толщиной H. Уравнения равновесия пластины имеют вид

$$\frac{d(rT_r)}{dr} - T_\theta(r) = 0. \tag{9.1}$$

Сдвигающее усилие в осесимметричной задаче равно нулю, а растягивающие усилия зависят только от r. Соотношения упругости имеют вид

$$T_r = B(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta), \quad T_\theta = B(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r), \quad B = EH/(1-\nu^2). \tag{9.2}$$

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_r = \frac{dv}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{v}{r}, \tag{9.3}$$

где ν есть радиальное перемещение в пластине.

Подставляя выражения (9.2) и (9.3) в (9.1), получаем уравнение для радиального перемещения ν

$$\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr} - \frac{\nu}{r^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения дается формулами

$$\nu = \frac{c}{r} + br, \quad \varepsilon_r = b - \frac{c}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = b + \frac{c}{r^2},$$

где b и c — произвольные постоянные.

Для их определения служат краевые условия

$$r = a - h/2 : T_r = -pH; \quad r = a + h/2 : T_r = 0.$$

Определяя постоянные b и c, находим для них представления

$$b = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{c}{a^2}\left(1 - \frac{h}{a}\right), \quad c = \frac{(1+\nu)pa^3}{2Eh}.$$

Здесь и далее пренебрегают величинами порядка $O(h^2/a^2)$ в сравнении с единицей. Теперь можем выписать окружное усилие T_θ

$$T_\theta = \frac{2(1-\nu)B\,c}{a^2}\left[1 - \frac{h}{2a} - \frac{x}{a}\right], \quad r = a + x. \tag{9.4}$$

Тензор напряжений Коши дается формулой

$$\mathbf{T} = \frac{1}{H}\left(T_r\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + T_\theta\mathbf{t}\otimes\mathbf{t}\right), \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r,\ \mathbf{t} = \mathbf{e}_\theta. \tag{9.5}$$

Используя формулы (6.9), находим векторы усилий и моментов в поперечном сечении кольца

$$\mathbf{N} = paH(1 - h/2a)\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \frac{h^2H}{12}p\mathbf{b}. \tag{9.6}$$

Построим решение этой же задачи по теории стержней. На стержень действует внешняя нагрузка, которая определяется на основании равенства

$$\rho_0\mathcal{F}ds = pH(a - h/2)\mathbf{n}d\theta \quad \Rightarrow \quad \rho_0\mathcal{F} = pH(1 - h/2a)\mathbf{n}.$$

Перемещения, повороты, векторы деформации в этой задаче имеют предельно простой вид

$$\mathbf{u} = w\mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e} = (w/a)\mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}.$$

Усилия и моменты вычисляются по соотношениям Коши–Грина

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = A_3(w/a)\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{B} = B_{32}(w/a^2)\mathbf{b},$$

где тензоры упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определены формулами (7.8) и (7.11), в которых принято $\varphi' = 0$ и $\alpha = 0$.

Для определения нормального смещения w используем уравнения статики

$$\mathbf{N}' + \rho_0 \mathfrak{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{pa^2H}{A_3}\left(1 - \frac{h}{2a}\right).$$

Окончательно для усилий и моментов получаем следующие выражения:

$$\mathbf{N} = paH\left(1 - \frac{h}{2a}\right)\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \frac{B_{32}}{A_3}pH\left(1 - \underline{\frac{h}{2a}}\right). \tag{9.7}$$

В выражении (9.7) для момента следует отбросить подчеркнутое слагаемое, поскольку оно выходит за пределы принятой точности. В этой задаче моменты сами по себе уже являются малыми. В формуле (9.6) для момента слагаемое этого порядка также не учитывалось. Сравнивая выражения (9.6) и (9.7) и требуя их совпадения, находим модуль B_{32}

$$B_{32} = \frac{h^2}{12}A_3 = EJ_2 = C_2. \tag{9.8}$$

10. Изгиб прямолинейного стержня мертвым моментом

В качестве простой иллюстрации рассмотрим одну из немногих задач, допускающих точное элементарное решение по нелинейной теории. Примем, что в уравнениях (3.1)–(3.2) внешние силы и моменты, а также инерционные члены отсутствуют, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Тогда имеем

$$\mathbf{N}'(s,t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \tag{10.1}$$

Краевые условия имеют вид

$$s = 0: \ \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L} \equiv L\,\mathbf{m}, \tag{10.2}$$

где $\mathbf{L} = \mathrm{const}$ и не зависит от деформации.

Решения уравнений статики (10.1) с учетом условий (10.2) имеют вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{L} = L\,\mathbf{m}. \tag{10.3}$$

Соотношения упругости для первоначально прямолинейных, но естественно закрученных стержней определены формулами

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathcal{E} + \varphi' B_0 (\mathbf{t} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\Phi}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\Phi} + \varphi' B_0 (\mathcal{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t},$$

где φ' — естественная крутка стержня, которая ниже предполагается постоянной: $\varphi = 2\pi s/l$, l — длина, на которой поперечное сечение стержня поворачивается на угол 2π.

Первое из этих соотношений с учетом формул (10.3) принимает вид:

$$\mathcal{E} = -\left(\frac{\varphi' B_0}{A_3}\right)(\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \left(1 - \frac{\varphi' B_0}{A_3} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}\right) \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}. \tag{10.4}$$

Соотношения упругости для момента с учетом выражений (10.3) и (10.4) переписываются в следующем виде:

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \cdot [C_t \mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1 \mathbf{d}_1\,\mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2\,\mathbf{d}_2] \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\Phi}, \quad C_t \equiv C_3 \left(1 - \frac{\varphi'^2 B_0^2}{C_3 A_3}\right). \tag{10.5}$$

В принципе несложно построить решение задачи при произвольных значениях жесткостей стержня на изгиб, ибо она соответствует хорошо изученному случаю Эйлера в динамике твердого тела. Но, чтобы не загромождать решение чисто техническими деталями, ограничимся случаем, когда $C_1 = C_2$. Уравнение (10.5) перепишем в обращенной форме и добавим к нему уравнение Пуассона (3.4). Тогда получим систему

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{P} \cdot [C_t^{-1} \mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{t}\,\mathbf{t})] \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{P}. \tag{10.6}$$

Система (10.6) имеет первый интеграл, который называется интегралом энергии и выглядит так:

$$\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot [C_t^{-1} \mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{t}\,\mathbf{t})] \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{L} = \mathrm{const}. \tag{10.7}$$

Интеграл энергии (10.7) налагает ограничение на вид тензора поворота $\mathbf{P}$. Общий вид тензора поворота, удовлетворяющего интегралу энергии (10.7), может быть представлен произведением

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\beta\,\mathbf{t}), \tag{10.8}$$

где использовано стандартное обозначение

$$\mathbf{Q}(\gamma\,\mathbf{p}) \equiv (1 - \cos\gamma)\mathbf{p}\,\mathbf{p} + \cos\gamma\,\mathbf{E} + \sin\gamma\;\mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

для поворота на угол γ вокруг единичного вектора $\mathbf{p}$.

Если $C_1 \neq C_2$, то представление (10.8) неприменимо. При любых значениях углов $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ энергия (10.7) остается постоянной. Используя представление (10.8), систему (10.6) переписываем в виде

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m}) \cdot [C_t^{-1}\mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{t}\,\mathbf{t})] \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m}) \cdot (\alpha'\,\mathbf{m} + \beta'\,\mathbf{t}).$$

Исключая отсюда тензор поворота $\mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m})$, получаем совсем простую систему

$$\alpha'(s)\,\mathbf{m} + \beta'(s)\,\mathbf{t} = L\,[C_t^{-1}\mathbf{t}\,\mathbf{t} + C_1^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{t}\,\mathbf{t})] \cdot \mathbf{m} = L\,[(C_t^{-1} - C_1^{-1})\cos\sigma\ \mathbf{t} + C_1^{-1}\,\mathbf{m}],$$

решение которой дается формулами

$$\alpha'(s) = L\,C_1^{-1}, \quad \beta'(s) = L\,(C_t^{-1} - C_1^{-1})\cos\sigma, \quad \cos\sigma \equiv \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}. \tag{10.9}$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая краевое условие для тензора поворота, находим

$$\alpha(s) = L\,C_1^{-1}s, \quad \beta(s) = L\cos\sigma\,(C_t^{-1} - C_1^{-1})\,s.$$

Чтобы найти форму изогнутого стержня, необходимо проинтегрировать второе из равенств (10.4), но предварительно необходимо вычислить величину

$$\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \frac{L\cos\sigma}{C_t}. \tag{10.10}$$

Чтобы понять смысл этой величины, нужно вспомнить формулу (5.5)

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{\Phi} = \mathbf{Q}(\alpha\,\mathbf{m}) \cdot (\varphi'\mathbf{t} + \alpha'\,\mathbf{m} + \beta'\,\mathbf{t}).$$

Кручение деформированного стержня определяется по формуле (1.7)

$$\tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \varphi' + \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}.$$

Таким образом величина (10.10) определяет изменение кручения стержня в процессе деформации. Вычислим остальные характеристики деформированного стержня. В данной задаче деформации поперечного сдвига отсутствуют. Относительное удлинение стержня находится по формуле (10.4)

$$\varepsilon = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = -\frac{\varphi'\,B_0}{A_3}\,\frac{L\cos\sigma}{C_t}. \tag{10.11}$$

Отсюда видим, что при отсутствии естественной крутки ($\varphi' = 0$) длина стержня при деформации не меняется. Если $\varphi' \neq 0$, то при $L > 0$ стержень укорачивается, а при $L < 0$ — удлиняется. Для определения кривизны и кручения несущей кривой нужно вычислить ее естественный трехгранник

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{m}) \cdot \mathbf{t}, \quad \tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{t}} \times \mathbf{m} / \sin\sigma, \quad \tilde{\mathbf{b}} = [\tilde{\mathbf{t}}\cos\sigma - \mathbf{m}] / \sin\sigma.$$

Отсюда, используя прямое вычисление, находим вектор Дарбу, кривизну и кручение несущей кривой

$$\tilde{\tau} = \alpha' \cos\sigma\,\tilde{\mathbf{t}} - \alpha' \sin\sigma\,\tilde{\mathbf{b}} = \alpha'\mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \tilde{R}_c^{-1} = \alpha' \sin\sigma, \quad \tilde{R}_t^{-1} = \alpha' \cos\sigma.$$

Интегрируя уравнение (10.4), находим уравнение деформированной несущей кривой

$$\mathbf{R} = (1 + \varepsilon)\left[s\cos\sigma\,\mathbf{m} + \frac{C_1}{L}\mathbf{Q}\left(\frac{Ls}{C_1}\mathbf{m}\right) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{m}) - \frac{C_1}{L}(\mathbf{t} \times \mathbf{m})\right].$$

Вектор, стоящий в квадратных скобках этого выражения, описывает спираль, навитую на цилиндр радиуса $a = C_1 \sin\sigma/|L|$. Ось цилиндра натянута на вектор $\mathbf{m}$ и проходит через точку, определяемую вектором $(1 + \varepsilon)C_1(\pi\cos\sigma\,\mathbf{m} - 2\mathbf{t} \times \mathbf{m})/L$. Длина одного витка спирали равна $2\pi C_1/|L|$. Шаг спирали h равен $l\,\cos\sigma$.

11. Линейная теория прямолинейных стержней

11.1. Сводка основных уравнений

Полная система уравнений теории тонких стержней является достаточно сложной системой 12-го порядка как по материальной координате s, так и по времени. Но для прямолинейных стержней из однородного изотропного материала ситуация немного упрощается, ибо полная задача распадается на несколько независимых задач. С этой целью перемещения и повороты представим в виде разложений

$$\mathbf{u} = u\,\mathbf{t} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} = 0; \qquad \boldsymbol{\psi} = \psi\,\mathbf{t} + \mathbf{t} \times \theta, \quad \theta \cdot \mathbf{t} = 0,$$

где u – продольные смещения точек стержня; $\mathbf{w}$ – вектор поперечных смещений; ψ – кручение.

Векторы деформации преобразуются к виду

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \simeq \mathbf{e} = \varepsilon\,\mathbf{t} + \boldsymbol{\gamma}, \quad \varepsilon = u', \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w}' - \theta; \qquad \boldsymbol{\Phi} \simeq \psi'\,\mathbf{t} + \mathbf{t} \times \theta',$$

где ε – относительное удлинение стержня; $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор деформации поперечного сдвига; ψ' – относительное закручивание стержня; $\boldsymbol{\theta}'$ – вектор изгибных деформаций.

Смысл векторов $\mathbf{w}'$ и $\boldsymbol{\theta}$ объясняют следующие равенства:

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} + \mathbf{w}', \quad \mathbf{D}_3 = \mathbf{t} + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{t} = \mathbf{t} + \boldsymbol{\theta}.$$

Аналогичные разложения выпишем для векторов усилий и моментов

$$\mathbf{N} = T\,\mathbf{t} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{Q} = 0; \qquad \mathbf{M} = H\,\mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{L}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{L} = 0,$$

где T – продольное усилие в стержне; $\mathbf{Q}$ – вектор поперечных усилий; H – крутящий момент; $\mathbf{L}$ – вектор изгибающих моментов.

Для тензоров инерции и упругости принимаем следующие представления:

$$\rho_0 = \rho\, F, \quad \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2 = \rho\, \left(J_p\, \mathbf{t}\,\mathbf{t} + \mathbf{c}\right), \quad \mathbf{c} \equiv \left(J_1 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + J_2\, \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2\right),$$

$$\mathbf{A} = EF\,\mathbf{t}\,\mathbf{t} + kGF(\mathbf{E} - \mathbf{t}\,\mathbf{t}), \quad \mathbf{B} = \varphi' B_0\, \mathbf{t}\,\mathbf{t}, \quad \mathbf{C} = GJ_r \mathbf{t}\,\mathbf{t} + E\,\mathbf{c}, \quad k = \pi^2/12,$$

где ρ – объемная плотность массы материала стержня; k – коэффициент поперечного сдвига, остальные обозначения были введены ранее, причем далее естественная крутка φ' считается постоянной.

В принятых обозначениях полная задача разбивается на задачи о продольно-крутильных и об изгибно-сдвиговых деформациях стержня.

Продольно-крутильные деформации стержня

Если стержень имеет естественное кручение, то продольные и крутильные деформации оказываются связанными и задача сводится к интегрированию следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\varphi' B_0}{EF}\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{c_l^2}\mathcal{F}_t = 0, \qquad c_l^2 = \frac{E}{\rho}. \tag{11.1}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\varphi' B_0}{GJ_r}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\rho\, F}{GJ_r}\mathcal{L}_t = 0, \quad c_t^2 = \frac{GJ_r}{\rho\, J_p}. \tag{11.2}$$

Если естественная крутка отсутствует, т. е. $\varphi' = 0$, то система (11.1)–(11.2) распадается на два независимых уравнения, а продольные и крутильные деформации находятся независимо друг от друга. В этом случае параметр c_l определяет скорость распространения продольных волн, а параметр c_t определяет скорость распространения волн кручения. При наличии крутки эти скорости меняются в зависимости от величины крутки.

Система (11.1)–(11.2) является строго гиперболической. Чтобы закончить постановку задачи о продольно-крутильных деформациях, к системе (11.1) – (11.2) необходимо присоединить краевые и начальные условия.

Задача изгиба

Задачу изгиба можно сформулировать в нескольких модификациях. Сначала выпишем общую постановку.

Уравнения движения в задаче изгиба принимают следующий вид:

$$\mathbf{Q}' + \rho\, F\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_n = \rho\, F\, \ddot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{L}' + \mathbf{Q} - \rho\, F\, \mathbf{t} \times \boldsymbol{\mathcal{L}}_n = \rho\, \mathbf{c}_* \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}, \tag{11.3}$$

где введены обозначения

$$\mathbf{c}_* \equiv -\mathbf{t} \times \mathbf{c} \times \mathbf{t} = J_2 \mathbf{d}_1\, \mathbf{d}_1 + J_1\, \mathbf{d}_2\, \mathbf{d}_2,\ \boldsymbol{\mathcal{F}}_n = (\mathbf{E} - \mathbf{t}\,\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}},\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_n = (\mathbf{E} - \mathbf{t}\,\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}.$$

Соотношения упругости связывают усилия и моменты с деформациями

$$\mathbf{Q} = kGF\boldsymbol{\gamma} = kGF(\mathbf{w}' - \boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{L} = E\, \mathbf{c}_* \cdot \boldsymbol{\theta}'. \tag{11.4}$$

Общую задачу изгиба часто можно упростить.

Балка Бернулли–Эйлера

Предполагается, что внешние моменты отсутствуют и можно пренебречь инерцией вращения

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_n = \mathbf{0}, \quad \rho\, \mathbf{c}_* \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} \approx \mathbf{0}.$$

Кроме того, считается, что жесткость балки на поперечный сдвиг бесконечно велика, но при этом поперечная сила остается ограниченной

$$\lim_{k\to\infty} |\mathbf{Q}| < \infty \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{w}'. \tag{11.5}$$

В этом случае вектор поворота выражается через вектор нормального прогиба, поперечная сила определяется не соотношениями упругости, а уравнениями движения. Общая система уравнений (11.3)–(11.4) упрощается и принимает вид

$$\mathbf{Q}' + \rho\, F\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_n = \rho\, F\, \ddot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{L}' + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L} = E\, \mathbf{c}_* \cdot \mathbf{w}''. \tag{11.6}$$

Исключая из системы (11.6) векторы поперечных сил и моментов, получаем векторное уравнение для нормального прогиба

$$-E\, \mathbf{c}_* \cdot \mathbf{w}'''' + \rho\, F\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_n = \rho\, F\, \ddot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} = w_1 \mathbf{d}_1 + w_2 \mathbf{d}_2,$$

которое эквивалентно двум независимым скалярным уравнениям

$$-E\, J_2\, w_1'''' + \rho\, F\, \mathcal{F}_1 = \rho\, F\, \ddot{w}_1, \quad -E\, J_1\, w_2'''' + \rho\, F\, \mathcal{F}_2 = \rho\, F\, \ddot{w}_2. \tag{11.7}$$

Уравнения (11.7) называются уравнениями Бернулли–Эйлера. Их предельная простота и достаточно широкая область применимости обеспечили им огромную популярность в прикладных исследованиях. Вместе с тем уравнения Бернулли–Эйлера имеют параболический тип, т. е. скорость распространения сигнала, согласно этим уравнениям, бесконечно велика. Этот факт, конечно, неприемлем с точки зрения фундаментальной науки, но отнюдь не делает уравнения Бернулли–Эйлера бесполезными с практической точки зрения. Дело в том, что с бесконечной скоростью движется только бесконечно малая часть сигнала, а основная часть сигнала распространяется с конечной скоростью.

Балка Тимошенко

Балка Бернулли–Эйлера достаточно хорошо моделирует относительно медленные процессы в тонких стержнях. Если же стержень не очень тонкий или необходимо рассматривать высокочастотные воздействия на стержень (например, ударные воздействия), то лучше использовать полную систему (11.3)– 11.4), учитывающую как деформацию поперечного сдвига, так и инерцию вращения. Модель прямолинейного стержня, учитывающую деформацию поперечного сдвига, принято называть балкой Тимошенко. В скалярной форме система (11.3)–(11.4) распадается на две независимых подсистемы

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} - \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{\partial \theta_1}{\partial s} + \frac{1}{c_b^2}\mathcal{F}_1 = 0, \qquad c_b^2 = \frac{kG}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} + \frac{kF}{2(1+\nu)J_2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial s} - \theta_1\right) + \frac{\rho F}{EJ_2}\mathcal{L}_2 = 0. \tag{11.8}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial s^2} - \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \frac{\partial \theta_2}{\partial s} + \frac{1}{c_b^2}\mathcal{F}_2 = 0, \qquad c_b^2 = \frac{kG}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + \frac{kF}{2(1+\nu)J_1}\left(\frac{\partial w_2}{\partial s} - \theta_2\right) - \frac{\rho F}{EJ_1}\mathcal{L}_1 = 0. \tag{11.9}$$

Балка Тимошенко описывается строго гиперболическими уравнениями и имеет значительно большую область применимости в сравнении с балкой Бернулли–Эйлера. Уравнения (11.8)–(11.9) значительно сложнее системы (11.7), но и значительно точнее и правильнее описывают процессы, протекающие в балках.

11.2. Определение тензора напряжений

Теория стержней позволяет найти усилия и моменты в стержне, которые связаны с тензором Коши формулами (6.9)

$$\mathbf{N} = \int\limits_{(F)} \mathbf{t}\cdot\mathbf{T}dxdy, \quad \mathbf{M} = \int\limits_{(F)} \mathbf{a}\times(\mathbf{t}\cdot\mathbf{T})dxdy,$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\mathsf{T}$ есть тензор напряжений Коши.

Строго говоря, эти соотношения позволяют приближенно найти только напряжения, действующие в поперечном сечении стержня. В типичной для теории стержней ситуации эти напряжения являются преобладающими, т. е. напряжениями, действующими по площадкам, параллельным касательной к несущей линии, можно пренебречь. Именно так бесхитростно мы и будем поступать, хотя, в принципе, напряжения можно определить и поточнее, чем это будет сделано в дальнейшем, но проблема определения напряжений выходит за рамки собственно теории стержней.

Общую задачу разобьем на задачиу растяжения-изгиба $\mathbf{T}_b$ и задачу кручения $\mathbf{T}_s$. Полный тензор напряжения Коши представим в виде суперпозиции

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_b + \mathbf{T}_s.$$

В задаче растяжения-изгиба вектор напряжений представим в виде

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_b = b^i(s)\,\mathbf{d}_i + [a_1(s)\,x + a_2(s)\,y]\,\mathbf{t}. \tag{11.10}$$

Интегрируя выражение (11.10) по площади поперечного сечения, получаем

$$\mathbf{N} = F\,b_0^i(s)\mathbf{d}_i. \tag{11.11}$$

Умножая выражение (11.10) векторно на $\mathbf{a} = x\mathbf{d}_1 + y\mathbf{d}_2$ и используя определение момента, получаем оставшуюся часть вектора $\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_b$. Окончательное выражение для этого вектора имеет вид

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_b = \frac{1}{F}\mathbf{N} + \mathbf{a} \cdot \left[\mathbf{t} \times \left(\frac{1}{J_1}\mathbf{d}_1\,\mathbf{d}_1 + \frac{1}{J_2}\mathbf{d}_2\,\mathbf{d}_2\right) \times \mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{L}. \tag{11.12}$$

Тензор напряжений в задаче кручения определяется через крутящий момент $H = \mathbf{t} \cdot \mathbf{M}$ следующим образом:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{T}_s = -\frac{H}{J_r}\,\mathbf{t} \times \boldsymbol{\nabla} U, \quad \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{d}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{d}_2 \frac{\partial}{\partial y}, \tag{11.13}$$

где функция кручения U определяется по уравнению (8.11).

11.3. Продольно-крутильные колебания балки

Анализ свободных продольно-крутильных колебаний стержня сводится к решению системы (11.1)–(11.2) при следующих краевых условиях:

$$s = 0: \ \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = T = 0; \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = H = 0. \tag{11.14}$$

Эти краевые условия отвечают свободным концам стержня. Разумеется, возможны и другие типы краевых условий. Например, торцы балки могут быть закреплены относительно смещений и поворотов. При свободных колебаниях задаются начальные распределения перемещений и поворотов, а также скоростей. Для этого нужно приложить к балке некоторые силы и моменты. Далее в момент времени $t = 0$ балка отпускается, т. е. $\mathcal{F}_t = 0$ и $\mathcal{L}_t = 0$, и начинается процесс свободных колебаний. Начальные условия не отличаются многообразием форм и имеют вид

$$t = 0: \ u = u_1(s), \quad \dot{u} = u_2(s), \quad \psi = \psi_1(s), \quad \dot{\psi} = \psi_2(s). \qquad (11.15)$$

Частные решения системы (11.1)–(11.2) при $\mathcal{F}_t = 0$ и $\mathcal{L}_t = 0$ будем искать в виде

$$u(s,t) = A_n \sin \lambda_n s e^{i\omega t}, \quad \psi(s,t) = B_n \sin \lambda_n s e^{i\omega t}, \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}. \qquad (11.16)$$

Чтобы понять, почему частные решения ищутся именно в таком виде, нужно обратиться к учебникам по математической физике и изучить в них раздел, посвященный методу Фурье и задаче Штурма–Лиувилля. Здесь же мы просто обратим внимание на то, что решения (11.16) удовлетворяют краевым условиям (11.14). Подставляя (11.16) в систему (11.1)–(11.2), получаем

$$\left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - \lambda_n^2\right) A_n - \frac{\varphi' B_0}{EF}\lambda_n^2 B_n = 0, \quad -\frac{\varphi' B_0}{GJ_r}\lambda_n^2 A_n + \left(\frac{\omega^2}{c_t^2} - \lambda_n^2\right) B_n = 0. \qquad (11.17)$$

Для существования нетривиального (ненулевого) решения необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Omega^2 - (c_l^2 - c_t^2)\Omega + \gamma\, c_l^2\, c_t^2 = 0, \qquad (11.18)$$

где введены обозначения

$$\omega_n^2 = \lambda_n^2\, \Omega, \quad 0 < \gamma \equiv 1 - \frac{\varphi'^2 B_0^2}{EF\, GJ_r} \leq 1. \qquad (11.19)$$

Обратим внимание, что параметр Ω не зависит от числа полуволн n. Этот факт весьма важен (см. п. 11.4). Уравнение (11.19) имеет два корня, определяемых выражением

$$2\Omega_{1,2} = c_l^2 + c_t^2 \pm \sqrt{(c_l^2 - c_t^2)^2 + 4(1-\gamma)c_l^2\, c_t^2}. \qquad (11.20)$$

Соответственно имеем два спектра:

продольно-крутильный спектр

$$\omega_n^2 = \Omega_1 \lambda_n^2 = \frac{\lambda_n^2}{2}\left[c_l^2 + c_t^2 + \sqrt{(c_l^2 - c_t^2)^2 + 4(1-\gamma)c_l^2 c_t^2}\right] \qquad (11.21)$$

и крутильно-продольный спектр

$$\omega_n^2 = \Omega_2 \lambda_n^2 = \frac{\lambda_n^2}{2}\left[c_l^2 + c_t^2 - \sqrt{(c_l^2 - c_t^2)^2 + 4(1-\gamma)c_l^2 c_t^2}\right]. \qquad (11.22)$$

Общее решение системы (11.1)–(11.2), удовлетворяющее краевым условиям (11.14), представим в следующей форме:

$$u(s,t) = u_1 + \frac{c_l^2}{\Omega_2 - c_l^2}\frac{\varphi' B_0}{EF}\psi_1, \quad \psi(s,t) = \psi_1 + \frac{c_t^2}{\Omega_1 - c_t^2}\frac{\varphi' B_0}{GJ_r}u_1, \qquad (11.23)$$

где

$$u_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos(\sqrt{\Omega_1}\,\lambda_n t) + B_n \sin(\sqrt{\Omega_1}\,\lambda_n t)\Big)\sin\lambda_n s,$$

$$\psi_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(C_n \cos(\sqrt{\Omega_2}\,\lambda_n t) + D_n \sin(\sqrt{\Omega_2}\,\lambda_n t)\Big)\sin\lambda_n s.$$

Решение (11.23) представлено в виде ряда, каждое слагаемое которого содержит четыре произвольных постоянных. Для определения последних служат начальные условия (11.15).

11.4. Продольно-крутильные волны в стержне

Если естественная крутка у стержня отсутствует, т. е. $\varphi' = 0$, то система (11.1)–(11.2) распадается на два независимых волновых уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c_l^2}\mathcal{F}_t = 0, \qquad c_l^2 = \frac{E}{\rho}; \qquad (11.24)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\rho F}{GJ_r}\mathcal{L}_t = 0, \quad c_t^2 = \frac{GJ_r}{\rho J_p}. \qquad (11.25)$$

Из уравнений (11.24), (11.25) видим, что c_l есть скорость распространения продольных волн, а c_t — скорость распространения волн кручения, причем $c_l > c_t$. Прежде чем обсуждать свойства этих волн, покажем, что решение связанной системы (11.1)–(11.2) может быть выражено через решения волновых уравнений. Чтобы избежать излишних подробностей в изложении, примем, что внешние нагрузки отсутствуют. Рассмотрим два волновых уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_1}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0, \tag{11.26}$$

где введены новые, неизвестные заранее параметры Ω_1 и Ω_2, которые, как мы увидим позже, совпадают с параметрами, введенными ранее формулами (11.20).

Решения системы (11.1)–(11.2) будем искать в виде

$$u(s,t) = v(s,t) + \alpha_1\vartheta(s,t), \quad \psi(s,t) = \vartheta(s,t) + \alpha_2 v(s,t), \tag{11.27}$$

где α_1 и α_2 суть постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (11.27) в первое из уравнений системы (11.1)–(11.2), получаем

$$(1+\gamma_1\alpha_2)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (\alpha_1+\gamma_1)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - \frac{\alpha_1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0.$$

Будем считать, что

$$(1+\gamma_1\alpha_2)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_1}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right), \quad \gamma_1 \equiv \frac{\varphi' B_0}{EF},$$

$$(\alpha_1+\gamma_1)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - \frac{\alpha_1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = B\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega_2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}\right), \quad \gamma_2 \equiv \frac{\varphi' B_0}{GJ_r},$$

где A и B суть некие постоянные.

Для справедливости этих равенств необходимо выполнение следующих уравнений:

$$1+\gamma_1\alpha_2 = A, \quad \Omega_1 = A\,c_l^2, \quad \alpha_1+\gamma_1 = B, \quad \alpha_1\Omega_2 = B\,c_l^2.$$

Исключая отсюда постоянные A и B, приходим к равенствам

$$\Omega_1 = (1+\gamma_1\alpha_2)c_l^2, \quad \Omega_2 - c_l^2 = \gamma_1\,c_l^2/\alpha_1. \tag{11.28}$$

Подставляя (11.27) во второе из уравнений системы (11.1)–(11.2) и проделывая преобразования, аналогичные проведенным выше, получаем еще два уравнения

$$\Omega_1 - c_t^2 = \gamma_2\,c_t^2/\alpha_2, \quad \Omega_2 = (1+\gamma_2\alpha_1)c_t^2. \tag{11.29}$$

Получили систему уравнений для определения параметров Ω_1, Ω_2, α_1 и α_2. Из первых уравнений системы (11.28)–(11.29) получаем

$$\Omega_1^2 - (c_l^2 + c_t^2)\Omega_1 + (1-\gamma_1\gamma_2)c_l^2\,c_t^2 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\gamma_2 c_t^2}{\Omega_1 - c_t^2}, \quad \Omega_1 > c_l^2, \tag{11.30}$$

где Ω_1 есть тот корень уравнения (11.30), который стремится к c_l^2 при крутке, стремящейся к нулю.

Из вторых уравнений системы (11.28)–(11.29) получаем

$$\Omega_2^2 - (c_l^2 + c_t^2)\Omega_2 + (1 - \gamma_1 \gamma_2) c_l^2 \, c_t^2 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\gamma_1 c_l^2}{\Omega_2 - c_l^2}, \quad \Omega_2 < c_t^2, \quad (11.31)$$

где Ω_2 есть тот корень уравнения (11.31), который стремится к c_t^2 при крутке, стремящейся к нулю.

Таким образом, общее решение однородной системы (11.1)–(11.2) имеет вид

$$u(s,t) = \nu(s,t) + \frac{\gamma_1 c_l^2}{\Omega_2 - c_l^2}\vartheta(s,t), \quad \psi(s,t) = \vartheta(s,t) + \frac{\gamma_2 c_t^2}{\Omega_1 - c_t^2}\nu(s,t), \quad (11.32)$$

где ν и ϑ суть общие решения волновых уравнений (11.26).

Волновое уравнение является одним из важнейших уравнений в физике и давно детально изучено. За необходимыми деталями следует обратиться к учебникам по математической физике либо к специальной литературе, например [10].

Итак, наличие крутки в стержне не меняет характера волнового процесса в стержне (это по-прежнему волны без дисперсии, но наличие крутки меняет скорость распространения волн в стержне). Решение первого из уравнений (11.26) соответствует продольно-крутильной волне, причем скорость распространения этой волны $\sqrt{\Omega_1}$ оказывается выше скорости распространения продольной волны в стержне без крутки. Решение второго из уравнений (11.26) соответствует крутильно-продольной волне, скорость распространения которой $\sqrt{\Omega_2}$ оказывается ниже скорости распространения волны кручения в стержне без крутки.

11.5. Свободные колебания осциллятора на упругом волноводе

В качестве простой иллюстрации применения волнового уравнения рассмотрим свободные колебания осциллятора на упругом волноводе. Во множестве прикладных исследований подробно анализируется модель линейного осциллятора с вязким трением

$$m\ddot{x} + \underline{b\dot{x}} + cx = f\,(t)\,. \quad (11.33)$$

Подчеркнутое слагаемое традиционно трактуется как сопротивление внешней среды движению грузика с массой m. Но допустим, что осциллятор колеблется в вакууме. Эксперимент показывает, что и в этом случае колебания осциллятора будут затухающими. Спрашивается, откуда берется трение? Еще один вопрос. Как известно, в механических часах имеется специальное устройство, называемое балансиром. Назначение балансира — задавать тактовую частоту. Устройства балансиров бывают разные, но большинство из них могут моделироваться обыкновенным осциллятором, т. е. грузиком на пружинке.

Как известно, уравнение свободных колебаний грузика на пружинке имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0. \tag{11.34}$$

Собственная частота такого осциллятора $\omega^2 = c/m$. Для нормального функционирования часов необходимо, чтобы эта частота имела заданную величину. Таким образом, казалось бы никаких ограничений на выбор жесткости пружины нет. Важно обеспечить только отношение c/m. Однако мастера часовых дел с начала существования механических часов при конструировании часового механизма стремились сделать жесткость пружины как можно меньше. Спрашивается, зачем?

Обычно в механике рассматриваются системы как бы изолированные от окружающего мира. Например, считается, что точка подвеса осциллятора абсолютно жестко закреплена. На самом деле это идеализация. Не существует ничего абсолютно жесткого. В действительности любая механическая система взаимодействует со своим окружением и отдает часть своей энергии окружающей среде. В теоретических исследованиях это явление связывается с трением. Механизмы трения могут быть очень разными. Существует конструкционное трение, трение о воздух и т. д. Иными словами, мы обычно связываем трение с некоторыми неидеальностями, которые приводят к тому, что система становится неконсервативной.

Возможно ли, чтобы трение возникало в системе из идеальных элементов? Оказывается, что это так.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пусть полубесконечный стержень $(s > 0)$ с площадью поперечного сечения F соединен посредством пружины жесткостью c с грузиком массы m. Уравнение свободных колебаний груза на пружинке имеет вид

$$m\ddot{y} = c\left(u(0,t) - y(t)\right), \tag{11.35}$$

где $u(0,t)$ — смещение торца стержня, к которому присоединен грузик; $u(s,t)$ — продольные смещения поперечных сечений стержня.

Если $u(x,t) = 0$, то приходим к стандартному уравнению (11.34).

Уравнение продольных колебаний стержня имеет вид (11.24)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \text{где} \quad c_l^2 \equiv \frac{E}{\rho}. \tag{11.36}$$

Условие сопряжения торца стержня с пружиной

$$EF\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0} = -c\left(y\left(t\right) - u\left(0,t\right)\right). \tag{11.37}$$

Примем, что в начальный момент времени $t = 0$:

$$u\left(s,0\right) = 0; \quad \dot{u}\left(s,0\right) = 0; \quad y\left(0\right) = \alpha, \quad \dot{y}\left(0\right) = \beta. \tag{11.38}$$

Решение уравнения (11.36) представим в форме Даламбера–Эйлера

$$u\left(s,t\right) = \varphi\left(s - c_l t\right) + \psi\left(s + c_l t\right).$$

В данном случае $\psi\left(s + c_l t\right) = 0$, ибо волны по стержню распространяются вправо и никаких возмущений с бесконечности не приходит. Итак, общее решение уравнения (11.36) имеет вид

$$u\left(s,t\right) = \varphi\left(s - c_l t\right), \tag{11.39}$$

где функция $\varphi\left(s\right)$ определена на интервале $-\infty < s < \infty$.

Выполним начальные условия (11.38) для функции $u\left(s,t\right)$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(s\right) = 0, \quad \dot{u}\left(s,0\right) = -c_l\varphi'\left(s - c_l t\right)\bigg|_{t=0} = 0, \quad s > 0.$$

Согласно данным условиям функция $\varphi\left(s - c_l t\right)$ отлична от нуля только на отрицательной полуоси

$$\varphi\left(s - c_l t\right) = \begin{cases} 0, & s > c_l t, \\ \varphi\left(s - c_l t\right), & s < c_l t. \end{cases} \tag{11.40}$$

Далее получаем

$$\frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \varphi'\left(s - c_l t\right)\bigg|_{s=0} = \varphi'\left(-c_l t\right),$$

где штрих означает производную по единственному аргументу $(s - c_l t)$.

Введем обозначение

$$f = u(s,t)\Big|_{s=0} = \varphi(s - c_l t)\Big|_{s=0}.$$

Тогда $\dot f = -c_l \varphi'$ или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = \varphi'\Big|_{s=0} = -\frac{1}{c_l}\dot f. \tag{11.41}$$

Теперь с учетом (11.41) условие сопряжения принимает вид

$$EF\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = -c\,(y(t) - f) = -\frac{EF}{c_l}\dot f. \tag{11.42}$$

Отсюда

$$\dot f = \frac{c\,c_l}{EF}\,(y(t) - f(t)) \qquad \text{или} \qquad y(t) - f(t) = \frac{EF}{c\,c_l}\dot f.$$

Учитывая сказанное выше, уравнение (11.35) можно переписать как

$$\ddot y = \omega^2\,(f - y)\,, \quad \text{где} \quad \omega^2 = c/m, \tag{11.43}$$

или, принимая во внимание (11.42), как

$$\ddot y = -\frac{EF\omega^2}{c\,c_l}\dot f. \tag{11.44}$$

Интегрируя (11.44) с учетом начальных условий (11.38), получаем

$$\dot y = -\frac{EF\omega^2}{c\,c_l}f + \beta \quad \Rightarrow \quad f = \frac{c\,c_l}{EF\,\omega^2}\,(\beta - \dot y)\,. \tag{11.45}$$

Тогда (11.43) примет вид

$$\ddot y + \frac{c\,c_l}{EF}\dot y + \omega^2 y = \frac{c\,c_l}{EF}\beta. \tag{11.46}$$

Таким образом, для смещения грузика получили стандартное уравнение линейного осциллятора с вязким трением. Коэффициент вязкого трения

$$b = \frac{c\,c_l}{EF} = \frac{c}{F\sqrt{\rho E}}$$

определяется через основные параметры системы. Согласно полученному выражению излучение в окружающую среду будет тем меньше, чем меньше жесткость пружины c.

Зависимость коэффициента вязкого трения от жесткости является далеко не очевидной и находится только в результате решения соответствующей задачи. Тем большее восхищение вызывает интуиция старых мастеров, которые давно уже открыли обсуждаемую закономерность.

Решение уравнения (11.46) имеет вид

$$y = \exp\left(-bt/2\right)\left(\left(\alpha - \frac{b}{\omega^2}\beta\right)\cos\sqrt{\omega^2 - b^2/4}\,t + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta + \left(\alpha - b\beta/\omega^2\right)b/2}{\sqrt{\omega^2 - b^2/4}}\sin\sqrt{\omega^2 - b^2/4}\,t\right) + \frac{b}{\omega^2}\beta, \quad (11.47)$$

где $b \equiv \nu c/ES$.

Решение уравнения (11.36) в свою очередь примет вид

$$\varphi\left(x - \nu t\right) = \frac{b}{\omega^2}\left[\beta - \exp\left(\frac{b}{2}\left(\frac{x}{\nu} - t\right)\right)\left(\beta\cos\sqrt{\omega^2 - b^2/4}\left(\frac{x}{\nu} - t\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{b\beta/2 + \omega^2\left(\alpha - b\beta/\omega^2\right)}{\sqrt{\omega^2 - b^2/4}}\sin\sqrt{\omega^2 - b^2/4}\left(\frac{x}{\nu} - t\right)\right)\right], \quad x < \nu t. \quad (11.48)$$

Уравнение (11.46) доказывает: чем больше жесткость пружины, тем больше отвод энергии (т. е. взаимодействие с окружающей средой), тем больше трение. Если мы хотим чтобы колебания затухали как можно медленнее и, следовательно, отвод энергии был наименьший, жесткость пружины должна быть наименьшей.

О природе внутреннего трения в твердых телах

Рассмотрим твердое тело. Пусть оно находится в вакууме. Создадим условия для возникновения в твердом теле неких колебаний. Сопротивление внешней среды полностью отсутствует. Тем не менее экспериментально установлено, что колебания этого тела будут затухающими. Это явление называют внутренним трением в материале. Можно было бы подумать, что одни частицы материала трутся о другие и тем самым порождают трение.

Однако посмотрим на данное твердое тело в электронный микроскоп. Мы увидим что его атомы расположены в узлах кристаллической решетки и не трутся друг о друга. Тогда опять возникает вопрос о механизме внутреннего трения. Откуда оно берется? Ответом, по существу, является рассмотренная выше задача.

Представим себе, что существует некая тонкая среда (эфир), называемая электромагнитным полем. Электроны атома, а также и сами атомы колеблются в этой среде и излучают энергию в электромагнитное поле, которое уносит энергию колеблющихся атомов. Между прочим, уравнения Максвелла в простейшем случае сводятся к волновому уравнению, рассмотренному выше. Иными словами, уравнение (11.36) совсем не обязательно рассматривать в качестве модели стержня, оно может моделировать нечто не похожее на стержень.

11.6. Поперечные колебания: акустический и оптический спектры

Чтобы яснее ощутить различие между балками Бернулли–Эйлера и Тимошенко, рассмотрим задачу о свободных колебаниях балки прямоугольного поперечного сечения с размерами $h \times H$. Будем считать, что колебания происходят в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}_1$. Краевые условия шарнирного опирания сводятся к следующим.

Балка Бернулли–Эйлера:

$$s = 0,\, l: \;\; \mathbf{w} \cdot \mathbf{d}_1 = w_1 = 0; \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}_1 = E\, J_2\, w_1'' = 0. \tag{11.49}$$

Балка Тимошенко:

$$s = 0,\, l: \;\; \mathbf{w} \cdot \mathbf{d}_1 = w_1 = 0; \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}_1 = E\, J_2\, \theta_1' = 0. \tag{11.50}$$

Свободными называют колебания при отсутствии внешних нагрузок. Они возникают в результате задания начальных условий. Решение задачи о свободных колебаниях удобно проводить в два этапа. На первом этапе определяются частные решения, которые называются собственными формами колебаний. Каждой собственной форме колебания отвечает определенная частота колебаний, которая называется собственной частотой. В системах, которые описываются уравнениями в частных производных, существует счетное множество собственных форм колебаний, которые образуют полную ортогональную систему функций. На втором этапе решение задачи строится в виде ряда по формам свободных колебаний, что обычно не вызывает особых проблем. Поэтому решающим является именно построение форм свободных колебаний. Если они найдены, то задача по существу решена. Проиллюстрируем сказанное на примере балки Бернулли–Эйлера, а для балки Тимошенко ограничимся только нахождением собственных частот и форм колебаний.

Частные решения (формы свободных колебаний) для балки Бернулли–Эйлера будем искать в виде

$$w_1 = W \sin \lambda_n s\, e^{i\omega t}, \quad \lambda_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{11.51}$$

где λ_n называются волновыми числами; n — числом полуволн; ω — частотой колебания.

Функции (11.51) удовлетворяют краевым условиям (11.49). Подставляя (11.51) в первое из уравнений (11.7), получаем, что оно удовлетворяется ($\mathcal{F}_1 = 0$) при следующем значении частоты ω:

$$\omega_n^2 = \frac{EJ_2}{\rho F}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 = \frac{h^2}{12}\frac{E}{\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4. \tag{11.52}$$

Таким образом, найдено счетное множество точных частных решений (11.51) однородного уравнения (11.7). Коэффициенты, стоящие при функциях $e^{i\omega t}$ и показывающие форму прогиба оси балки, называются формами свободных (собственных) колебаний. Выражение (11.52) определяет собственные частоты балки. Общее решение первого из уравнений (11.7) даже при наличии внешней силы $\mathcal{F}_1$ ищем в виде ряда по собственным формам колебаний

$$w_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t)\, \sin \lambda_n s. \tag{11.53}$$

Если бы коэффициенты $W_n(t)$ ряда (11.53) были нам известны, то была бы известна и функция $w_1(s,t)$. Если известна функция $w_1(s,t)$, то легко находятся коэффициенты $W_n(t)$

$$W_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l w_1(s,t) \sin \lambda_n s\, ds.$$

Для определенности примем, что внешняя поперечная сила равна

$$\rho F \mathcal{F}_1 = p\, \cos \Omega t, \quad p,\ \Omega = const.$$

В качестве начальных условий примем следующие:

$$t = 0:\ w_1(s,0) = 0, \quad \dot{w}_1(s,0) = 0. \tag{11.54}$$

Физически это означает, что балка находилась в покое в недеформированном состоянии, а в момент времени $t = 0$ к ней внезапно приложена внешняя нагрузка, которая далее (при $t > 0$) меняется во времени. Рассмотрим следующий ход решения. Внешнюю нагрузку разложим в ряд по собственным функциям

$$p\cos\Omega t = p\cos\Omega t\,\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\sin\lambda_n s.$$

Это разложение и ряд (11.53) подставляем в уравнение (11.7). Далее приравниваем нулю коэффициенты при собственных функциях и получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для коэффициентов $W_n(t)$, нахождением которых и заканчивается построение общего решения. В рассматриваемой задаче, следуя указанному пути, мы приходим к правильному решению, что может ввести в заблуждение начинающего изучать механику. Стоит нам немного изменить постановку задачи, и мы получим ошибочное решение. Например, вместо однородного условия (11.49) для момента $E\,J_2\,w_1''(0,t) = 0$ можно рассмотреть условие $E\,J_2\,w_1''(0,t) = m(t)$. В этом случае указанный выше подход приведет к ошибке. Причина ошибка очевидна. Для того чтобы ряд (11.53) можно было подставить в уравнение (11.7), необходимо, строго говоря, чтобы ряд для четвертой производной по s сходился равномерно. Данная ситуация не всегда имеет место. Как же быть? Замечательный по своей простоте способ преодоления этой трудности предложил Г.А. Гринберг. Нужно просто умножить обе части уравнения на собственную функцию и проинтегрировать получившееся уравнение по интервалу $[0,\ l]$. В результате

$$\int_0^l \frac{d^4 w_1(s,t)}{d\,s^4}\sin\lambda_n s\,ds = \frac{d^3 w_1}{d\,s^3}\sin\lambda_n s\Big|_0^l - \frac{d^2 w_1}{d\,s^2}\lambda_n\cos\lambda_n s\Big|_0^l +$$

$$+\frac{dw_1}{d\,s}\lambda_n^2\sin\lambda_n s\Big|_0^l + \quad w_1\lambda_n^3\cos\lambda_n s\Big|_0^l + \lambda_n^4\int_0^l w_1(s,t)\sin\lambda_n s\,ds.$$

Первое и третье внеинтегральные слагаемые в правой части этого равенства исчезают всегда, ибо на концах интервала собственные функции обращаются в нуль. Последнее слагаемое выражается через коэффициент $W_n(t)$. Второе и четвертое внеинтегральные слагаемые могут исчезать, а могут и не исчезать — это зависит от краевых условий. Примем, например, следующие условия:

$$s = 0:\ w_1 = 0,\quad E\,J_2\,w_1'' = m(t);\qquad s = l:\ w_1 = 0,\quad E\,J_2\,w_1'' = 0.$$

Эти условия переходят в (11.49) при $m(t) = 0$. Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\int_0^l \frac{d^4 w_1(s,t)}{d\,s^4}\sin\lambda_n s\,ds = \frac{m(t)}{EJ_2}\lambda_n + \lambda_n^4\frac{l}{2}W_n(t).$$

Таким образом, для коэффициента $W_n(t)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 W_n(t)}{d\,t^2} + \omega_n^2 W_n(t) = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}\,\frac{p}{\rho\,F}\,\cos\Omega\,t - \frac{2\lambda_n m}{l\,\rho\,F}, \qquad (11.55)$$

где величина ω_n^2 определена выражением (11.52).

Величина краевого момента $m(t)$ входит в уравнение (11.55) для определения коэффициента $W_n(t)$. Если бы мы непосредственно подставляли ряд (11.53) в уравнение (11.7), то получили бы уравнение (11.55) при $m(t)=0$, и это было бы ошибкой. Вернемся, однако, к исходной задаче, т. е. далее считаем $m(t)=0$.

Общее решение уравнения (11.55) имеет вид

$$W_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t - \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(\Omega^2-\omega_n^2)}\,\frac{p}{\rho\,F}\,\cos\Omega\,t.$$

В общее решение вошли две произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий (11.54). Выполняя начальные условия (11.54), получаем окончательное выражение для $W_n(t)$

$$W_n(t) = -\frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(\Omega^2-\omega_n^2)}\,\frac{p}{\rho\,F}\,(\cos\Omega\,t - \cos\omega_n t)\,.$$

Подставляя это выражение в (11.53), находим представление для прогиба

$$w_1(s,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi(\Omega^2-\omega_n^2)}\,\frac{p}{\rho\,F}\,(\cos\Omega\,t-\cos\omega_n t)\,\sin\lambda_n\,s. \qquad (11.56)$$

Теоретически этот ряд сходится довольно быстро, поскольку при больших n члены ряда убывают по закону n^{-5}. Практически же дело обстоит не столь благополучно, и все зависит от частоты внешней силы. Если Ω велика, например $\Omega^2 > \omega_9^2$, то первые четыре члена ряда (ряд содержит только нечетные значения n) будут возрастать и только потом коэффициенты начнут убывать. Так что придется удерживать довольно большое число членов ряда. И тем больше, чем выше частота Ω. Случай резонанса, когда Ω совпадает с одной из собственных частот балки, сейчас мы обсуждать не будем, поскольку без учета трения это не имеет смысла. Любопытно обсудить случай внезапного приложения постоянной внешней нагрузки. Используем выражение (11.56) при $\Omega=0$

$$w_1(s,t) = \frac{p}{EJ_2}\,\frac{4l^4}{\pi^5}\sum_{n=1,3,5..}\frac{1}{n^5}\,(1-\cos\omega_n t)\,\sin\lambda_n\,s. \qquad (11.57)$$

Рассмотрим чисто статическую задачу об изгибе балки той же поперечной нагрузкой, причем прикладываем нагрузку, бесконечно медленно увеличивая ее значение от нуля до p.

$$-E\,J_2\,w_{st}'''' + p = 0, \quad \Rightarrow \quad w_{st} = \frac{p}{EJ_2}\frac{4l^4}{\pi^5}\sum_{n=1,3,5..}\frac{1}{n^5}\sin\lambda_n s. \tag{11.58}$$

Сравнивая выражения (11.57) и (11.58), получаем

$$\max_t\,[w_1(s,t)] = 2\,w_{st}.$$

Таким образом, максимальное во времени значение прогиба при внезапном приложении нагрузки оказывается вдвое больше прогиба, полученного при бесконечно медленном (статическом) приложении нагрузки. Коэффициент пропорциональности между динамическим и статическим прогибами называется коэффициентом динамичности. Как правило, его значение равно двум.

Обратимся к решению этой же задачи по модели Тимошенко.

Частные решения (формы свободных колебаний) для балки Тимошенко ищем в виде

$$w_1 = A\,\sin\lambda_n s\,e^{i\omega t}, \quad \theta_1 = B\,\cos\lambda_n s\,e^{i\omega t}, \quad \lambda_n = n\,\pi/l, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Указанные решения удовлетворяют краевым условиям (11.50). Подставляя эти решения в уравнения (11.8), получаем систему для определения постоянных A и B

$$\left(\frac{\omega_n^2}{c_b^2} - \lambda_n^2\right)A + \lambda_n B = 0,\ \ \lambda_n A + \left[\gamma\left(\frac{\omega_n^2}{c_l^2} - \lambda_n^2\right) - 1\right]B = 0,\ \ \gamma \equiv \frac{2(1+\nu)h^2}{12k}.$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получаем частотное уравнение, которое можно записать в форме

$$\Omega^2 - (1 + \alpha x + x)\Omega + \alpha x^2 = 0, \tag{11.59}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Omega = \frac{\gamma\,\omega_n^2}{c_l^2}, \quad x = \gamma\,\lambda_n^2 = \frac{2(1+\nu)}{k}\frac{h^2}{12}\frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \alpha = \frac{k}{2(1+\nu)}.$$

В отличие от балки Бернулли–Эйлера, модель Тимошенко имеет два частотных спектра: акустический (низкочастотный) и оптический (высокочастотный). Они определяются как корни уравнения (11.59). Низший корень определяет акустический спектр

$$2\Omega = 1 + (1+\alpha)\,x - \sqrt{1 + 2(1+\alpha)x + (1-\alpha)^2 x^2}. \tag{11.60}$$

Больший корень дает оптический спектр

$$2\Omega = 1 + (1+\alpha)\,x + \sqrt{1 + 2(1+\alpha)x + (1-\alpha)^2 x^2}. \tag{11.61}$$

Значения частот в указанных спектрах зависят от коэффициента поперечного сдвига k. Универсальным следует считать $k = \pi^2/12$. Если по каким-либо причинам оптический спектр нас не интересует, то при вычислении акустического спектра лучшее согласие с трехмерной теорией дает значение коэффициента поперечного сдвига $k = 5/(6-\nu)$.

Чтобы получить спектр балки Бернулли–Эйлера, необходимо рассмотреть малые значения параметра x. При проведении практических расчетов лучше использовать непосредственно уравнение (11.59), т. е. формулы (11.60) и (11.61). Но для наглядности выпишем решения уравнения (11.59) для малых и больших значений x.

Акустический спектр (малые волновые числа)

$$\omega_n^2 = \frac{h^2}{12}\,\frac{E}{\rho}\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^4\left(\frac{1}{1 + h^2\,\lambda_n^2/12 + h^2\,\lambda_n^2/12\alpha}\right). \tag{11.62}$$

Спектр балки Бернулли–Эйлера, получается из (11.62), если дробь, заключенную в круглые скобки, положить равной единице, что можно сделать для исчезающе малых x. Выражение (11.62) показывает, что уравнение балки Бернулли–Эйлера не может претендовать на хорошее описание даже низкочастотного спектра. Все, что можно сделать с помощью данного уравнения, — правильно найти не более 3 - 4 низших частот. Высшие частоты акустического спектра описываются уравнением балки Бернулли–Эйлера совершенно неправильно. Поэтому модель балки Бернулли–Эйлера лучше использовать только в статических расчетах.

Оптический спектр (малые волновые числа)

$$\omega_n^2 = \frac{12k}{h^2}\,\frac{G}{\rho}\left[1 + (1+\alpha)x - \frac{\alpha\,x^2}{1 + (1+\alpha)x}\right]. \tag{11.63}$$

Указанный спектр вообще не описывается уравнением балки Бернулли–Эйлера. При стремлении высоты балки к нулю эти частоты стремятся к бесконечности, в то время как частоты акустических колебаний стремятся к нулю. В спектре (11.63) есть частота, отвечающая значению $n = 0 \Rightarrow x = 0$. Эту частоту мы уже находили ранее (см. (8.7)) при определении коэффициента поперечного сдвига.

Акустический спектр (большие волновые числа)

$$\omega_n^2 = k\,\frac{G}{\rho}\left[-\frac{k}{2(1+\nu)}\,\frac{12}{h^2} + \lambda_n^2\right], \quad \lambda_n^2 \gg \frac{k}{2(1+\nu)}\frac{12}{h^2}. \tag{11.64}$$

Эту часть акустического спектра уравнение балки Бернулли–Эйлера описывает совершенно неверно.

Оптический спектр (большие волновые числа)

$$\omega_n^2 = \frac{E}{\rho}\left[\frac{k}{2(1+\nu)}\frac{12}{h^2} + \lambda_n^2\right], \quad \lambda_n^2 \gg \frac{k}{2(1+\nu)}\frac{12}{h^2}. \tag{11.65}$$

11.7. Плоский изгиб балки Тимошенко

Рассмотрим подробнее плоский изгиб балки Тимошенко. Будем считать, что изгиб происходит в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}_1$. В этом случае необходимо рассматривать систему (11.8), которую перепишем в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial\theta}{\partial s} + \frac{1}{c_b^2}\mathcal{F}_1 = 0, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{A_1}{C_2}\left(\frac{\partial w}{\partial s} - \theta\right) = 0. \tag{11.66}$$

Здесь мы опустили индексы у прогибов и поворотов и оставили только поперечную нагрузку, отбросив погонные моменты. Систему (11.66) можно переписать в другой форме, если ввести новую переменную

$$Z(s,t) = \frac{\partial w}{\partial s} - \theta, \quad \gamma \equiv \frac{A_1}{C_2}. \tag{11.67}$$

Переменная Z есть деформация поперечного сдвига. В новых переменных система (11.66) принимает вид

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \gamma Z = 0. \tag{11.68}$$

При выводе системы (11.68) было продифференцировано первое уравнение системы (11.66). Поэтому при интегрировании системы (11.68) необходимо проверять выполнение первого уравнения системы (11.66). Исключая из последней системы переменную Z, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right) + \underline{\frac{\gamma}{c_b^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{c_b^2}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial s}} = 0. \tag{11.69}$$

Уравнение (11.69) при $\mathcal{F}_1 = 0$ описывает распространение волн с дисперсией. Оно значительно сложнее обычного волнового уравнения. В принципе несложно построить точное решение уравнения (11.69), например с помощью преобразования Лапласа. Много примеров такого рода можно найти в книге [11]. Однако решение имеет весьма сложную форму, поддающуюся, тем не менее, точному анализу и выяснению всех деталей. На этом останавливаться не будем. Рассмотрим, как распространяется по балке высокочастотный сигнал такой, что

$$\left|\frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}\right| \gg \gamma\left|\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right|.$$

В таком случае в уравнении (11.69) можно отбросить подчеркнутое слагаемое. Получившееся решение является суперпозицией двух волн без дисперсии

$$\theta = \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2, \qquad \frac{\partial^2\tilde{\theta}_1}{\partial s^2} - \frac{1}{c_b^2}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_1}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\tilde{\theta}_2}{\partial s^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_2}{\partial t^2} = 0.$$

Одна из этих волн распространяется со скоростью продольных волн c_l, а другая — со скоростью волн сдвига c_b.

В заключение рассмотрим статическую задачу о плоском изгибе балки Тимошенко равномерно распределенной нагрузкой

$$\rho_0\mathcal{F}_1 = p \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_1/c_b^2 = p/A_1.$$

В качестве краевых принимаем условия жесткой заделки

$$s = 0, l: \; w = 0, \quad \theta = 0.$$

В случае статики решение системы (11.66) имеет вид

$$w = \frac{pl^4}{24C_2}\left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right)^2 + \frac{pl^2}{2A_1}\left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right), \quad \theta = \frac{pl^3}{12C_2}\left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right)\left(1 - 2\frac{s}{l}\right).$$

Для сравнения приведем решение этой же задачи для балки Бернулли–Эйлера

$$w = \frac{pl^4}{24C_2}\left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right)^2, \quad \theta = \frac{pl^3}{12C_2}\left(\frac{s}{l} - \frac{s^2}{l^2}\right)\left(1 - 2\frac{s}{l}\right). \tag{11.70}$$

Как видим, учет деформации поперечного сдвига немного уточнил выражение для прогиба. Поворот сечения, момент и поперечная сила при этом не меняются.

12. Нелинейный изгиб защемленной балки

На основе изложенного выше можно сделать вывод, что учет деформации поперечного сдвига в статических задачах для тонких стержней не играет большой роли. Сейчас мы хотим выяснить роль учета нелинейности. Действительно, в линейной теории задачи изгиба и растяжения разделяются. Поэтому продольная сила в стержне не участвует в процессе изгиба. Между тем, интуиция подсказывает, что при изгибе защемленного стержня в нем возникает продольная сила и притом весьма значительная. Например, при очень малой жесткости на изгиб стержень почти не отличается от нити, в которой растягивающее усилие играет определяющую роль. Поэтому ее игнорирование нуждается в обосновании.

Будем рассматривать изгиб стержня в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}_1$. Внешнюю нагрузку примем в виде

$$\rho_0 \boldsymbol{\mathcal{F}} = p\tilde{\mathbf{n}}, \quad p = \text{const},$$

где $\tilde{\mathbf{n}}$ есть нормаль к деформированной несущей линии.

Считаем, что торцы стержня закреплены от смещений и поворотов

$$s = -l/2: \ \mathbf{R} = -(l/2)\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l/2: \ \mathbf{R} = (l/2)\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}.$$

При плоском изгибе сечения стержня поворачиваются только вокруг $\mathbf{d}_2$. Поэтому имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{d}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} = \psi' \mathbf{d}_2.$$

Соотношения упругости принимаем в форме (6.3)

$$\mathbf{N} = A\varepsilon\, \mathbf{P}\cdot\mathbf{t} + Q\tilde{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Phi} = C_2\,\psi' \mathbf{d}_2. \tag{12.1}$$

Точные (нелинейные) уравнения статики записываются в виде

$$A\varepsilon' = Q\psi', \quad A\varepsilon\psi' + Q' + p = 0, \quad C_2\psi'' + (1+\varepsilon)Q = 0. \tag{12.2}$$

Прежде чем продолжить решение задачи об изгибе стержня, рассмотрим случай очень малой жесткости стержня на изгиб $C_2 \approx 0$, т. е. струну. В этом случае третье и первое уравнения системы (12.2) дают $Q = 0$, $A\varepsilon = T_0 = \text{const}$. Второе уравнение из (12.2) позволяет найти угол поворота

$$\psi(s) = -ps/T_0. \tag{12.3}$$

Чтобы найти продольное усилие T_0 в струне, следует воспользоваться краевыми условиями. Имеем

$$\mathbf{R}' = (1+\varepsilon)\mathbf{P}\cdot\mathbf{t} = (1+\varepsilon)(\cos\psi\, \mathbf{t} + \sin\psi\, \mathbf{d}_1).$$

Интегрируя это равенство по интервалу $[-l/2, l/2]$, после простых преобразований получаем

$$\frac{pl}{2T_0} = \left(1 + \frac{T_0}{A}\right)\sin\left(\frac{pl}{2T_0}\right). \tag{12.4}$$

Обратим внимание, что, несмотря на малость величины T_0/A в сравнении с единицей, пренебрегать этой величиной нельзя, ибо тогда уравнение (12.4) не имеет решения, кроме тривиального. Уравнение (12.4) перепишем в другой форме

$$x^2 = (x+\gamma)\sin x, \quad x \equiv pl/(2T_0), \quad \gamma \equiv pl/(2A).$$

В этом уравнении γ есть малая величина, и единственное решение данного уравнения также малая величина. Поэтому функцию $\sin x$ можно разложить в ряд по x и ограничиться первыми двумя членами. В результате подобной операции получим следующее уравнение:

$$x^3 + \gamma x^2 - 6\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x \simeq \sqrt[3]{3pl/A}. \tag{12.5}$$

Поскольку $pl/A \ll 1$, то x мало и все принятые ранее допущения выполнены. Для продольной силы получили следующее значение:

$$T_0 = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{Ap^2l^2} \quad \Rightarrow \quad \psi(s) = -\sqrt[3]{\frac{pl}{24A}}\,\frac{s}{l}. \tag{12.6}$$

Угол поворота в решении для струны, естественно, не удовлетворяет исходному краевому условию для балки и не обращается в нуль на концах интервала. Чтобы выполнить краевое условие для угла поворота, необходимо учесть жесткость балки на изгиб. Иными словами, необходимо вернуться к системе (12.2). Она допускает точное решение в эллиптических функциях, но мы ограничимся приближенным решением.

Поскольку относительное удлинение является малым, то ε в последнем уравнении системы (12.2) может быть отброшено в сравнении с единицей. Исключая из первого уравнения системы (12.2) поперечную силу Q, находим первый интеграл

$$A\varepsilon = T_0 - \frac{1}{2}C_2\psi'^2, \quad T_0 = \mathrm{const}. \tag{12.7}$$

Используя (12.7), второе уравнение системы (12.2) переписываем в виде

$$-C_2\psi''' + T_0\psi' - \frac{1}{2}C_2\psi'^3 + p = 0. \tag{12.8}$$

Осталось определить постоянную T_0, для чего необходимы краевые условия. Получаем равенство

$$\mathbf{R}' = (1+\varepsilon)\mathbf{P}\cdot\mathbf{t} = (1+\varepsilon)(\cos\psi\,\mathbf{t} + \sin\psi\,\mathbf{d}_1).$$

Вычисляя интегралы от обеих частей этого равенства по интервалу $[-l/2,\, l/2]$ с учетом нечетности функции $\psi(s)$ и четности функции $\varepsilon(s)$, получаем следующее условие

$$l = 2\int_0^{l/2}[1+\varepsilon(s)]\cos\psi(s)ds = 2\int_0^{l/2}\cos\psi(s)ds + 2\int_0^{l/2}\varepsilon(s)\cos\psi(s)ds.$$

Поскольку повороты и растяжения являются малыми, то $\cos\psi(s)$ можно разложить в ряд по $\psi(s)$ и удержать только главные члены. Тогда получим

$$\int_0^{l/2}\varepsilon(s)ds = \frac{1}{2}\int_0^{l/2}\psi^2(s)ds.$$

Исключая из этого равенства относительное удлинение $\varepsilon(s)$ с помощью соотношения (12.7), получаем уравнение для определения постоянной T_0

$$l\,T_0 = \int_0^{l/2}\left(A\psi^2 + C_2\psi'^2\right)ds. \tag{12.9}$$

Теперь мы в состоянии определить порядок всех величин, входящих в уравнение (12.8). С этой целью введем в рассмотрение безразмерную независимую переменную $s = l\,\xi$. Кроме того, будем использовать следующее представление для жесткости на изгиб $C_2 = A\,h^2/12$, справедливое для балки прямоугольного поперечного сечения. В этих обозначениях равенство (12.9) переписываем в следующей форме:

$$\frac{T_0}{A} = \int_0^{1/2}\left(\psi^2 + h_*^2\dot\psi^2\right)d\tau, \quad \dot\psi \equiv \frac{d\psi}{d\xi}, \quad h_*^2 \equiv \frac{h^2}{12\,l^2} \ll 1. \tag{12.10}$$

Уравнение (12.8) также перепишем в безразмерной форме

$$h_*^2\left[\frac{d^3\psi}{d\xi^3} + \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^3\right] - \int_0^{1/2}\left(\psi^2 + h_*^2\dot\psi^2\right)d\tau\,\frac{d\psi}{d\xi} = \eta, \quad \eta \equiv \frac{pl}{A}. \tag{12.11}$$

Уравнение (12.11) содержит два малых параметра h_*^2 и η и является существенно нелинейным. Оно допускает простое решение в двух предельных случаях: линейное приближение и струнное приближение. Найдем условия применимости обоих указанных случаев.

Линейное приближение

$$h_*^2\frac{d^3\psi}{d\xi^3} = \eta, \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{\eta}{6h_*^2}\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\xi.$$

Подставляя это решение в уравнение (12.11) и оставляя в нем только главное из отброшенных нелинейных слагаемых, получаем

$$\eta + \frac{4}{105}\left(\frac{\eta}{24h_*^2}\right)^3\left(\frac{1}{4} - 3\xi^2\right) = \eta \quad \Rightarrow \quad 1 \ll \left(\frac{l}{h}\right)^4 \ll 10\,\frac{E}{p_0}, \qquad (12.12)$$

где $p = p_0\,H$, т. е. p_0 — это давление, действующее на балку.

Левая граница последнего неравенства выражает условие применимости теории стержней. Модуль Юнга E для стали примерно равен $2\cdot 10^7$ н/см^2. Если давление p_0 есть величина порядка одной атмосферы (10 н/см^2), то неравенство (12.12) сводится к условию $1 \ll l/h \ll 10\sqrt[4]{2000} \simeq 67$. Полученное ограничение является довольно жестким, но следует указать, что оно получено для самой неблагоприятной ситуации. На практике осуществить условия жесткой заделки почти невозможно, да к этому и не стремятся. Податливость заделки приводит к значительному расширению правой границы неравенства (12.12) в силу уменьшения продольной силы в стержне.

Оценим точность выполнения уравнения (12.11), если в него подставить струнное приближение (12.6). В результате получаем

$$-\frac{h_*^2}{24}\,\frac{p_0\,l}{E\,h} + \sqrt[3]{\frac{1}{24}}\frac{p_0\,l}{E\,h} = \frac{p_0\,l}{E\,h} \quad \Rightarrow \quad h_*^2 << 4\sqrt[3]{9}.$$

Иными словами, приближение струны является практически точным решением уравнения (12.11), но оно не удовлетворяет краевым условиям для угла поворота. Тем не менее сравним максимальные значения нормального прогиба балки, найденного по линейной теории (см. формулу (11.70)) и по струнному приближению (12.6)

$$w' = \psi(s) = -\sqrt[3]{\frac{pl}{24A}}\,\frac{s}{l} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{pl}{24A}}\left(1 - \frac{4s^2}{l^2}\right).$$

Максимальные значения прогиба для балки $w_b^{(max)}$ и для струны $w_s^{(max)}$ вычисляются по формулам

$$w_b^{(max)} = \frac{l}{32}\,\frac{l^3}{h^3}\,\frac{p_0}{E}, \quad w_s^{(max)} = \frac{l}{16\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{l}{h}\,\frac{p_0}{E}}.$$

Зависимость максимальных значений прогибов от параметров задачи в рассматриваемых предельных случаях существенно различается. Вместе с тем в обоих случаях оказалось возможным отбросить в уравнении (12.11) слагаемое $h_*^2(d\psi/d\xi)^3$. Поэтому предположим, что данное слагаемое можно отбросить и в общем случае, а затем покажем, что это оправдано. Без учета указанного слагаемого и однократного интегрирования уравнение (12.11) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \lambda^2\psi = \lambda^2\gamma\xi, \quad \lambda^2 \equiv \frac{12l^2 T_0}{h^2 A}, \quad \gamma \equiv \frac{p_0 H l}{T_0}. \tag{12.13}$$

Решение уравнения (12.13), удовлетворяющее краевым условиям, дается выражением

$$\psi(s) = -\frac{pl}{2T_0}\left[\frac{2s}{l} - \frac{\operatorname{sh}\lambda s}{\operatorname{sh}(\lambda l/2)}\right], \quad \lambda^2 \equiv \frac{T_0}{C_2}, \quad -\frac{l}{2} \le s \le \frac{l}{2}. \tag{12.14}$$

Здесь мы вернулись к исходным переменным. Осталось определить постоянную T_0. При уменьшении жесткости балки на изгиб продольная сила T_0 должна стремиться к величине (12.6), а угол поворота — к величине (12.3).

Для определения T_0 служит условие (12.9). Вычисление входящих в него интегралов дает

$$J_1 \equiv \int_0^{l/2} \psi^2 ds = \frac{p^2 l^3}{4T_0^2}\left[\frac{1}{6} - \frac{3\operatorname{ch} z}{4z\operatorname{sh} z} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 z} + \frac{1}{z^2}\right],$$

$$J_2 \equiv \int_0^{l/2} \psi'^2 ds = \frac{p^2 l}{4T_0^2}\left[\frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 z} + \frac{z\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} - 2\right], \quad z \equiv \frac{\lambda l}{2}.$$

Используя значения этих интегралов и проводя небольшие преобразования, уравнение (12.9) переписываем в следующей форме:

$$q\,z^2 = \frac{945}{z^4}\left[\frac{1}{6} - \frac{3\operatorname{ch} z}{4z\operatorname{sh} z} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 z} + \frac{1}{z^2} + h_*^2\left(\frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 z} + \frac{z\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} - 2\right)\right], \tag{12.15}$$

$$q \equiv 420\left(\frac{E}{p_0}\right)^2\left(\frac{h}{l}\right)^8, \quad h_*^2 \equiv \frac{C_2}{Al^2}, \quad z \equiv \frac{\lambda l}{2}, \quad \lambda^2 \equiv \frac{T_0}{C_2}, \quad p_0 \equiv \frac{p}{H}.$$

Параметр q в уравнении (12.15), как легко убедиться, может принимать значения в широком интервале, например $[10^{-3}, 10^3]$. В представленном виде правая часть уравнения (12.15) есть монотонно убывающая функция z, не имеет особенности в нуле, а ее значение в нуле примерно равно единице.

Рассмотрим предельные случаи уравнения (12.15). Переход к струне происходит при больших значениях переменной x. В этом случае уравнение (12.15) принимает вид

$$\frac{q}{945}z^6 = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{1}{2\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{Ap^2l^2}.$$

Получили результат, который для струны уже был представлен формулой (12.6). Переход к балке осуществляется при малых значениях переменной x. Раскладывая правую часть уравнения в ряд по x, получаем

$$qz^2 = 1 - \frac{z^2}{5} + \frac{z^4}{33} + 2h_*^2\left(21 - 4z^2 + \frac{3z^4}{5}\right).$$

Для не слишком длинной балки это уравнение принимает совсем простой вид

$$qz^2 = 1 + 42h_*^2 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{4C_2}{l^2}\left(1 + \frac{7h^2}{2l^2}\right)\frac{1}{420}\left(\frac{p_0}{E}\right)^2\left(\frac{l}{h}\right)^8.$$

Вычислим приближенное значение нормального прогиба по формуле

$$w' = \psi \quad \Rightarrow \quad w = \frac{pl}{2T_0}\left(\frac{l}{4} - \frac{l \operatorname{ch} z}{2z \operatorname{sh} z} - \frac{s^2}{l} + \frac{\operatorname{ch} \lambda s}{\lambda \operatorname{sh} z}\right).$$

Максимального значения прогиб достигает при $s = 0$

$$w(0) = \frac{pl^2}{4T_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z \operatorname{sh} z}\right).$$

Раскладывая это выражение в ряд по степеням z и сохраняя два главных члена, получаем

$$w(0) = W_0\left[1 - \frac{1 + 7h^2/3l^2}{4200}\left(\frac{p_0}{E}\right)^2\left(\frac{l}{h}\right)^8\right], \quad W_0 \equiv \frac{pl^4}{16 \cdot 24C_2},$$

где W_0 есть значение прогиба, найденного по линейной теории.

Это выражение позволяет оценить возможность применения линейной теории. Для сравнительно коротких балок линейная теория, безусловно, применима. Но для длинных балок, например при $l = 100h$, она становится сомнительной.

13. Эластика Эйлера

Обратимся к рассмотрению одной из самых знаменитых задач механики, известной под названием эластики Эйлера (1744 г.). Исследование этой задачи привело к возникновению новых разделов механики (теория устойчивости упругих конструкций) и математической физики (теория ветвлений решений нелинейных уравнений [12]). Решения многих нелинейных задач статики для тонких стержней можно найти в книге [13].

Эластикой Эйлера называют задачу о нагружении первоначально прямолинейного стержня продольной силой, приложенной к свободному торцу стержня. При этом используется модель нерастяжимого стержня. Для определенности будем рассматривать стержень, у которого жесткости на изгиб одинаковы $C_1 = C_2$. Математически задача сводится к интегрированию уравнений статики

$$\mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \tag{13.1}$$

Соотношения упругости принимаем в форме (6.3)

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Phi} = (C_3 - C_1)(\mathbf{t} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{\Phi})\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} + C_1\mathbf{\Phi}, \tag{13.2}$$

причем вектор упругого усилия $\mathbf{N}$ определяется по уравнениям статики.

К уравнениям (13.1) и (13.2) следует присоединить краевые условия

$$s = 0: \ \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \tag{13.3}$$

Положительные значения N в (13.3) соответствуют сжимающей силе, действующей на прямолинейный стержень. Для сильно изогнутого стержня первоначально сжимающая сила может стать растягивающей.

Следует помнить и выражения для векторов деформации (3.4) и (5.3)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{P}, \quad |\mathbf{R}'| = 1.$$

Краевая задача (13.1) – (13.3) всегда имеет очевидное решение

$$\mathbf{R}(s) = s\,\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \tag{13.4}$$

которое отвечает прямолинейной форме равновесия сжатого стержня.

Ниже будет показано, что при достаточно малых значениях сжимающего усилия N равновесная конфигурация (13.4) является единственной. При превышении усилием N некого критического значения, называемого эйлеровой критической силой, появляются дополнительные равновесные конфигурации, в которых стержень изогнут. Чтобы найти эти равновесные конфигурации, сначала нужно выяснить, к какому классу кривых принадлежат изогнутые равновесные конфигурации. Оказывается, что в эластике Эйлера существуют только равновесные конфигурации, описываемые плоскими кривыми. Доказательство этого факта начнем с очевидного равенства

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \mathbf{\Phi} - (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}')\mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Используя последнее равенство и второе из соотношений (13.2), получаем

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Умножая второе из уравнений статики (13.1) скалярно на $\mathbf{R}'$, получаем интеграл

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{R}' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' - \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = \text{const}.$$

Согласно краевым условиям имеем

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}' = 0.$$

Первое уравнение статики и краевые условия показывают, что $\mathbf{N} = -N\,\mathbf{t}$. Умножая второе из уравнений статики (13.1) скалярно на $\mathbf{N}$, получаем еще один интеграл

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{N})' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = -N\,\mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = 0. \tag{13.5}$$

Окончательное выражение для момента имеет вид

$$\mathbf{M} = C_1\,\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = C_1 R_c^{-1} \tilde{\mathbf{t}} \times \tilde{\mathbf{n}} = C_1 R_c^{-1} \tilde{\mathbf{b}}, \tag{13.6}$$

где R_c, $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{n}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ суть радиус кривизны, касательная, нормаль и бинормаль упругой линии в деформированном состоянии, соответственно.

Поскольку построение прямолинейной равновесной конфигурации не вызывает никаких затруднений, в дальнейшем будем рассматривать только изогнутые формы равновесия $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$. Интеграл (13.5) дает равенство

$$(\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') \cdot \mathbf{t} = -R_c^{-1} (\tilde{\mathbf{t}} \times \tilde{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{t} = -R_c^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

которое показывает, что векторы $\mathbf{R}''$, $\mathbf{R}'$ и $\mathbf{t}$ лежат в одной плоскости.

Следовательно вектор $\mathbf{R}''$ можно представить в виде разложения

$$\mathbf{R}'' = \mu\,\mathbf{t} + \lambda\,\mathbf{R}' = \mu\,[\mathbf{t} - (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{t})\mathbf{R}'], \quad \mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}'' = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Используя это разложение, для бинормали получаем следующее представление:

$$\tilde{\mathbf{b}} = -R_c\,(\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') = -R_c\,\mu(\mathbf{R}' \times \mathbf{t}).$$

Дифференцируя это выражение и исключая из получившегося соотношения вектор $\mathbf{R}''$, получаем

$$\tilde{\mathbf{b}}' = -\left[(R_c\,\mu)' - R_c \mu^2 (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{t})\right] (\mathbf{R}' \times \mathbf{t}).$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на вектор $\tilde{\mathbf{b}}$ и учитывая ортогональность векторов $\tilde{\mathbf{b}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}'$, получаем, что выражение в квадратных скобках должно быть равно нулю. Это означает, что вектор бинормали имеет не только постоянный модуль (равный единице), но и постоянен по направлению. В дальнейшем тильду у бинормали будем опускать, т. е. $\tilde{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{b}$.

Таким образом, для второго вектора деформации получили выражение

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = -R_c^{-1}\mathbf{b} \equiv \psi'(s)\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \equiv \tilde{\mathbf{b}}, \quad \psi'(s) \equiv -R_c^{-1}(s). \tag{13.7}$$

Зная вектор $\mathbf{\Phi}$, нетрудно найти тензор поворота [3]. Он имеет вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \cos\psi(s)\,\mathbf{t} + \sin\psi(s)\,\mathbf{b}. \tag{13.8}$$

Итак, выражения для векторов усилий и моментов в эластике Эйлера по необходимости имеют вид

$$\mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Phi} = C_1\,\psi'(s)\mathbf{b}. \tag{13.9}$$

Краевая задача (13.1)–(13.3) таким образом сводится к скалярной нелинейной задаче для определения угла поворота $\psi(s)$

$$C_1\psi'' + N\sin\psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \tag{13.10}$$

Получили однородную нелинейную краевую задачу для угла поворота $\psi(s)$. При любых значениях внешней силы N данная краевая задача имеет нулевое решение $\psi = 0$, которое отвечает прямолинейной форме равновесия стержня. Однако при определенных условиях, налагаемых на внешнюю силу, однородная краевая задача (13.10) может иметь ненулевое решение.

Без труда находится первый интеграл в задаче (13.10)

$$\psi'^2 = \frac{2N}{C_2}\left(\cos\psi(s) - \cos\psi(l)\right). \tag{13.11}$$

Из уравнения (13.11) следует, что при $N < 0$, т. е. при приложении к стержню растягивающей силы, оно имеет только нулевое решение $\psi = 0$, т. е. стержень остается прямолинейным. При положительных N уравнение (13.11) может иметь ненулевое решение, а может и не иметь его. В уравнении (13.11) сделаем замену искомой переменной. Сначала перейдем к половинному углу

$$\cos\psi = 1 - 2\,\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

и перепишем уравнение (13.11) в следующем виде:

$$\psi'^2 = \frac{4N}{C_2}\left[\sin^2\left(\frac{\psi(l)}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\psi(s)}{2}\right)\right]. \tag{13.12}$$

Введем новую переменную ϑ

$$\sin\vartheta = \frac{\sin(\psi/2)}{\sin(\psi_l/2)}, \quad 0 \le \vartheta(s) \le \pi/2, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta(l) = \pi/2.$$

Здесь мы ограничиваемся построением только тех решений, которые удовлетворяют условию $0 \le \psi(s) \le \pi$. Дифференцируя последнее равенство по s и возводя получившееся равенство в квадрат, получаем уравнение

$$\vartheta'^2 = \frac{N}{C_2}\left[1 - \sin^2\beta\sin^2\vartheta\right] \quad \Rightarrow \quad \vartheta' = \sqrt{\frac{N}{C_2}}\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\vartheta}, \tag{13.13}$$

где $\beta \equiv \psi(l)/2$ и учтено, что $\vartheta' > 0$.

Следует обратить внимание, что уравнение (13.13) эквивалентно уравнению (13.12) только в том случае, когда функция $\psi(s)$ не равна тождественно нулю. Для прямолинейной формы равновесия уравнение (13.13) теряет смысл. Кроме того, следует обратить внимание, что ϑ', в отличие от ψ', не обращается в нуль на свободном торце стержня.

Интегрируя уравнение (13.13), получаем равенство

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}}\, s = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\tau}}\ , \tag{13.14}$$

которое определяет s как функцию переменной ϑ и параметра $\psi(l)$. Прежде всего необходимо найти параметр β. Для этого нужно использовать условие $\vartheta(l) = \pi/2$. В таком случае уравнение (13.14) принимает вид

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}}\, l = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\tau}} \equiv J(\beta)\,. \tag{13.15}$$

Правая часть уравнения (13.15) есть монотонно возрастающая функция параметра β, в чем можно убедиться, вычислив производную от нее по β:

$$\frac{dJ(\beta)}{d\beta} = \frac{\sin 2\beta}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\tau d\tau}{\sqrt{(1 - \sin^2\beta\sin^2\tau)^3}} > 0, \quad 0 < 2\beta < \pi.$$

Наименьшее значение функция $J(\beta)$ принимает в нуле, где она равна $J(0) = \pi/2$. При β, стремящемся к $\pi/2$, интеграл $J(\beta)$ стремится к бесконечности. Если левая часть (13.15) меньше $\pi/2$, то уравнение (13.15) не имеет решения. При выполнении неравенства

$$\sqrt{\frac{N}{C_2}}\, l \ge \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad N \ge \frac{\pi^2 C_2}{4l^2} \tag{13.16}$$

решение уравнения (13.15) существует и единственно. Значение N, при котором в неравенстве (13.16) достигается знак равенства, называется эйлеровой критической силой N_{cr}

$$N_{cr} \equiv \frac{\pi^2 C_2}{4l^2}. \tag{13.17}$$

При этом из (13.15) следует, что $\beta \equiv \psi(l)/2 = 0$. Отсюда в свою очередь следует, что $\psi(s) = 0$, т. е. стержень имеет только прямолинейную форму равновесия. При $N > N_{cr}$ уравнение (13.15) имеет ненулевое решение.

Легко найти решение уравнения (13.15) при малых $\sin^2\beta$. Для этого достаточно разложить подынтегральное выражение в (13.15) в ряд по степеням параметра $\sin^2\beta$ и ограничиться только первыми двумя членами разложения:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\tau}} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\beta\sin^2\tau.$$

Подставляя это разложение в (13.15), получаем

$$\sin^2\beta = 4\left(\sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} - 1\right), \quad N \geq N_{cr}. \tag{13.18}$$

Аналогично вычисляем правую часть равенства (13.14)

$$\int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\tau}} = \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\beta\right)\vartheta - \frac{1}{8}\sin^2\beta\sin 2\vartheta.$$

Принимая во внимание это равенство, а также (13.15), уравнение (13.14) переписываем в виде

$$\frac{\pi}{2}\frac{s}{l} = \vartheta - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{N_{cr}}{N}}\right)\sin 2\vartheta, \quad N \geq N_{cr}.$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений и ограничиваясь вторым приближением, получаем

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}\frac{s}{l} + \frac{\gamma}{2}\sin\frac{\pi s}{l}, \quad \gamma \equiv 1 - \sqrt{\frac{N_{cr}}{N}}. \tag{13.19}$$

Видим, что величина ϑ слабо зависит от N, если, конечно, N незначительно превышает N_{cr}. Возвращаясь к исходной переменной ψ и учитывая ее малость, получаем в первом приближении следующее выражение:

$$\psi(s) = \psi_l \sin\vartheta = 4\left(\sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} - 1\right)^{1/2} \sin\left[\frac{\pi s}{2l} + \frac{\gamma}{2}\sin\frac{\pi s}{l}\right]. \tag{13.20}$$

Зная угол поворота, нетрудно вычислить все остальные неизвестные в данной задаче.

Подведем итоги. Если к торцу стержня приложена продольная растягивающая сила, то стержень имеет только одну прямолинейную равновесную конфигурацию. Ситуация меняется, если на стержень действует сжимающая сила. В этом случае всегда существует прямолинейная равновесная конфигурация, которая определяется следующими выражениями:

$$\mathbf{R}(s) = (1 - N/A)\, s\mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \tag{13.21}$$

В выражениях (13.21) учтена деформация растяжения, являющаяся малой величиной.

Если модуль сжимающей силы N превышает значение эйлеровой критической силы N_{cr}, определяемой формулой (13.17), то в эластике Эйлера появляется еще одно решение, представленное формулой (13.20). Интуиция подсказывает, что в действительности при $N > N_{cr}$ реализуется именно второе решение, а первое будет неустойчиво. Последнее утверждение нетрудно доказать теоретически, если рассмотреть малые движения относительно прямолинейной равновесной конфигурации. Здесь мы этого делать не будем, но в дальнейшем процедура наложения малых движений на равновесные конфигурации будет описана на примере модельной задачи.

В литературе [12] при суждении об устойчивости равновесной конфигурации часто используют "энергетические" соображения, а именно: из двух равновесных конфигураций устойчивой считается та, которая имеет меньшую энергию. Строго говоря, сравнение энергий равновесных конфигураций не имеет прямого отношения к понятию устойчивости. Равновесная конфигурация консервативной системы устойчива, если для нее потенциальная энергия имеет изолированный локальный минимум, который никак не связан с энергией другой равновесной конфигурации. Тем не менее из двух возможных равновесных конфигураций Природа, если это возможно, выбирает конфигурацию с меньшей энергией. Поэтому в эластике Эйлера устойчивой считается именно изогнутая конфигурация, поскольку потенциальная энергия в этом случае меньше [12]. Подобное рассуждение в эластике Эйлера вызывает возражение. Дело в том, что в рассматриваемом случае минимум энергии не изолирован. Фактически мы имеем семейство равновесных изогнутых конфигураций, и все они обладают одинаковой энергией. Действительно, полученное решение позволяет однозначно найти угол поворота ψ вокруг вектора бинормали $\mathbf{b}$, но сам вектор $\mathbf{b}$ был определен с точностью до произвольного поворота вокруг $\mathbf{t}$

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q}\left(\varphi(t)\mathbf{t}\right) \cdot \mathbf{b}_0,$$

где $\mathbf{b}_0$ есть произвольный фиксированный вектор, ортогональный $\mathbf{t}$; $\varphi(t)$ — произвольный угол поворота вокруг $\mathbf{t}$.

С такой же степенью неопределенности установлены и все искомые величины, определяемые формулами (13.7) и (13.8)

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \psi'(s)\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot \mathbf{b}_0;$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{b}_0) \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\varphi\mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot \left[\cos\psi(s)\,\mathbf{t} + \sin\psi(s)\,\mathbf{b}_0\right].$$

Если допустить, что угловой параметр φ зависит от времени, то можно вычислить угловую скорость [3]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{t}) \cdot \left[(1-\cos\psi)\,\mathbf{t} - \sin\psi\mathbf{b}_0 \times \mathbf{t}\right] = \dot{\varphi}\left[(1-\cos\psi)\,\mathbf{t} - \sin\psi\mathbf{b} \times \mathbf{t}\right].$$

Таким образом, если в эластике Эйлера мы сообщим изогнутому стержню сколь угодно малую угловую скорость, то он будет медленно вращаться (прецессировать) вокруг вектора $\mathbf{t}$, пробегая все множество равновесных конфигураций. Причем для этого не требуется приложения внешних моментов. Следует подчеркнуть, что речь не идет о вращениях стержня как жесткого целого. Например, заделанный торец стержня не поворачивается, ибо при $s = 0$ тензор поворота становится единичным тензором при любом значении φ. Речь идет о том, что стержень не сопротивляется неким специальным видам деформации, что для реальных стержней не соответствует действительности. Следовательно, указанный факт нужно отнести к некоему дефекту самой теории стержней, который до сих пор не устранен ни в одной из существующих версий теории стержней. Отметим, что от указанного дефекта невозможно избавиться никакими манипуляциями с внутренней энергией стержня. Конечно, можно в этой связи говорить о трении и тому подобных вещах и уклониться от решения проблемы. Но проблема существует, и ее необходимо разрешить. В частности, отмеченная особенность проявляется в так называемом парадоксе Николаи [2], который заключается в том, что равновесная конфигурация стержня, скрученного сколь угодно малым моментом, оказывается неустойчивой относительно бесконечно малых возмущений. Обычно [2] парадокс Николаи объясняют неконсервативностью задачи о кручении стержня. Однако это объяснение неудовлетворительно, ибо легко показать, что парадокс Николаи существует и в задаче о скручивании стержня потенциальным (консервативным) моментом.

Может показаться, что все рассуждения, связанные с вращением стержня, не вполне корректны, ибо рассматривались статические уравнения. Ниже мы рассмотрим эластику Эйлера в динамической постановке.

14. Стационарные вращения в эластике Эйлера

Запишем уравнения движения, исключив из них вектор $\mathbf{R}$

$$\mathbf{N}'' = \rho F \ddot{\mathbf{R}}', \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}. \qquad (14.1)$$

В данном случае использовано представление для момента, полученное в предыдущем пункте. Краевые условия принимаем в форме (13.3)

$$s = 0 : \ \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N}' = \mathbf{0}; \qquad s = l : \ \mathbf{N} = -N\mathbf{t}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \qquad (14.2)$$

Решение задачи (14.1)–(14.2) ищем в следующем виде:

$$\mathbf{P}(s,t) = \mathbf{Q}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{Q}\left[\psi(s)\mathbf{e}\right] \cdot \mathbf{Q}^{T}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right], \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = 0, \qquad (14.3)$$

где $\mathbf{e}$ — постоянный единичный вектор.

Из представления (14.3) видим, что при $s = 0$ и $\psi(0) = 0$ тензор поворота обращается в единичный тензор, т. е. поворот заделанного торца стержня отсутствует. Вектор изгиба-кручения, отвечающий тензору поворота (14.3), имеет вид

$$\mathbf{\Phi} = \psi'(s)\mathbf{Q}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{e} = \psi'(s)\mathbf{e}_*, \quad \mathbf{e}_*(t) \equiv \mathbf{Q}\left[\varphi(t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{e} \qquad (14.4)$$

Для касательной в актуальном положении имеем выражение

$$\mathbf{R}' = \cos\psi(s)\,\mathbf{t} + \sin\psi(s)\,\mathbf{e}_*(t) \times \mathbf{t}.$$

Отсюда

$$\ddot{\mathbf{R}}' = \sin\psi(s)\left(\ddot{\varphi}\mathbf{e}_*(t) - \dot{\varphi}^2\mathbf{e}_*(t) \times \mathbf{t}\right).$$

Вектор усилия $\mathbf{N}$ представим в виде разложения

$$\mathbf{N} = -N\mathbf{t} + Q_*\mathbf{e}_* + Q\mathbf{e}_* \times \mathbf{t}, \quad Q_*'(0,t) = Q'(0,t) = 0, \quad Q_*(l,t) = Q(l,t) = 0.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (14.1) и проецируя получившееся уравнение на оси $\mathbf{t}$, $\mathbf{e}_*$ и $\mathbf{e}_* \times \mathbf{t}$, получаем

$$Q'' = -\rho F \dot{\varphi}^2 \sin\psi, \quad Q_*'' = \rho F \ddot{\varphi} \sin\psi. \qquad (14.5)$$

При получении последнего равенства были использованы краевые условия. Для вектора момента имеем выражение

$$\mathbf{M} = C_1\,\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = C_1\,\psi'\mathbf{e}_*.$$

Второе уравнение системы (14.1) эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$C_1\psi'' + N\sin\psi + Q\cos\psi - Q_*\sin\psi = 0, \quad Q_* = 0. \tag{14.6}$$

Последнее уравнение в (14.6) и второе уравнение системы (14.5) показывают, что в эластике Эйлера возможны только стационарные вращения

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} \equiv \omega = \mathrm{const}. \tag{14.7}$$

Окончательно пришли к следующей системе уравнений:

$$Q'' = -\rho\,F\,\omega^2\sin\psi, \quad C_1\psi'' + N\sin\psi + Q\cos\psi = 0. \tag{14.8}$$

К системе (14.8) необходимо присоединить краевые условия

$$s = 0: \; Q'(0) = 0, \quad \psi(0) = 0; \qquad s = l: \; Q(l) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \tag{14.9}$$

Отступление

Точки ветвления решений [12] находятся в этой задаче весьма просто из линеаризованной задачи

$$Q'' = -\rho\,F\,\omega^2\psi, \quad C_1\psi'' + N\,\psi + Q = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_1\psi'''' + N\,\psi'' - \rho\,F\,\omega^2\psi = 0. \tag{14.10}$$

К уравнению (14.10) необходимо присоединить краевые условия

$$s = 0: \; \psi = 0, \; C_1\psi''' = -N\,\psi'; \quad s = l: \; C_1\psi'' = -N\,\psi, \; \psi' = 0. \tag{14.11}$$

Пришли к хорошо известной спектральной задаче, квадраты собственных чисел $\omega^2 \equiv \dot{\varphi}^2$ в которой вещественны. Впрочем, последнее утверждение требует отдельного доказательства. С этой целью сначала приведем задачу к безразмерному виду посредством введения обозначений

$$s = l\,\xi, \quad \lambda^2 = Nl^2/C_1, \quad \Omega^2 = \rho F l^4\omega^2/C_1.$$

В этих обозначениях задача (14.10)–(14.11) принимает следующий вид:

$$\psi'''' + \lambda^2\,\psi'' - \Omega^2\,\psi = 0, \quad \psi' \equiv d\psi/d\xi; \tag{14.12}$$

$$\xi = 0: \; \psi = 0, \; \psi''' = -\lambda^2\,\psi'; \quad \xi = 1: \; \psi'' = -\lambda^2\,\psi, \; \psi' = 0. \tag{14.13}$$

В задаче (14.12)–(14.13) параметр λ^2 является вещественным, а вещественность параметра Ω^2 требуется доказать. Доказательство будем проводить от противного. Допустим, что параметр Ω^2 является комплексным. Пусть собственному числу Ω^2 отвечает собственная функция ψ. Понятно, что комплексно сопряженная функция $\overline{\psi}$ также является собственной функцией и отвечает комплексно сопряженному собственному числу $\overline{\Omega}^2$. Умножая уравнение (14.12) на функцию $\overline{\psi}$ и интегрируя получившееся уравнение по интервалу $(0,1)$, после стандартных преобразований получаем тождество

$$(\Omega^2-\overline{\Omega}^2)\int_0^1 \psi\overline{\psi}d\xi = \psi_1'''\overline{\psi}_1-\overline{\psi}_1'''\psi_1+\psi_0''\overline{\psi}_0'-\overline{\psi}_0''\psi_0', \quad \psi(0)=\psi_0,\ \psi(1)=\psi_1.$$

Умножая уравнение (14.12) на функцию $\overline{\psi}''$ и проводя те же рассуждения, получаем еще одно тождество

$$(\Omega^2-\overline{\Omega}^2)\int_0^1 \psi'\overline{\psi}'d\xi = \lambda^2\left[\psi_1'''\overline{\psi}_1-\overline{\psi}_1'''\psi_1+\psi_0''\overline{\psi}_0'-\overline{\psi}_0''\psi_0'\right].$$

Из двух вышеуказанных тождеств следует искомое тождество

$$(\Omega^2-\overline{\Omega}^2)\int_0^1 \left(\psi'\overline{\psi}'-\lambda^2\psi\overline{\psi}\right)d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega^2=\overline{\Omega}^2.$$

Нелинейная краевая задача четвертого порядка (14.8)–(14.9) достаточно сложна для точного анализа, поскольку допускает только один первый интеграл. Но для наших целей нет нужды в получении точного решения. Мы видели, что в эластике Эйлера наряду с равновесными конфигурациями имеются вращающиеся “равновесные” конфигурации, причем скорость вращения осталась неопределенной. Здесь нам нужно показать, что учет сил инерции не уничтожает наличие вращающихся “равновесных” конфигураций, хотя и вносит некоторые уточнения. Прежде всего, мы установили, что вращения могут происходить только с постоянной угловой скоростью. Далее мы ограничимся рассмотрением случая малых скоростей вращения, поскольку в данной ситуации задачу можно линеаризовать. При малых ω^2 поперечная сила Q мала. Отклонение упругой линии от вертикали, т. е. угол нутации ψ, также незначительно меняется. Поэтому будем искать возмущенный угол нутации в виде разложения

$$\psi(s)=\psi_{st}(s)+\vartheta(s), \quad |\vartheta(s)|\ll 1,$$

где $\psi_{st}(s)$ есть ненулевое решение статической задачи при $N>N_{cr}$.

Подставляя это разложение в (14.8)–(14.9) и ограничиваясь членами первого порядка по ω^2, получаем следующую краевую задачу:

$$Q'' = -\rho F \omega^2 \sin\psi_{st}, \quad C_1\vartheta'' + (N\cos\psi_{st})\,\vartheta = Q\cos\psi_{st}; \tag{14.14}$$

$$s = 0: \; Q'(0) = 0, \quad \vartheta(0) = 0; \qquad s = l: \; Q(l) = 0, \quad \vartheta'(l) = 0. \tag{14.15}$$

Нетрудно доказать, что задача (14.14)–(14.15) имеет единственное решение, норма которого мала, если мала величина ω^2.

Таким образом, учет сил инерции не влияет на вывод о наличии вращающихся "равновесных" конфигураций. Это означает, что изогнутые равновесные конфигурации в эластике Эйлера неустойчивы, ибо повернутая изогнутая конфигурация уже не является сколь угодно близкой к неповернутой конфигурации при сколь угодно малых возмущениях.

Следует подчеркнуть, что эксперимент не подтверждает вывода о наличии вращающихся "равновесных" конфигураций. Грубый эксперимент, проведенный автором, показал, что если изогнутую равновесную конфигурацию слегка толкнуть, то начинаются низкочастотные колебания относительно равновесной конфигурации, но не вращения. Это означает, что *используемая нами модель стержня неверно описывает реальную ситуацию.* Между тем именно эта модель широко используется при анализе многих проблем устойчивости, например устойчивости положения равновесия скрученного стержня (парадокс Николаи). В последнем случае потерю устойчивости скрученного сколь угодно малым моментом стержня объясняют неконсервативностью задачи. По мнению автора, это "объяснение" неприемлемо, ибо потеря устойчивости происходит даже в том случае, когда кручение стержня производится потенциальным моментом, т. е. задача является консервативной. Кроме того, эксперимент также не подтверждает существование парадокса Николаи. Поэтому следует искать другие причины. В частности, необходимо внимательно проанализировать все допущения, сделанные нами при выводе теории стержней и при переходе к модели, описываемой уравнениями (14.1).

Среди общих допущений теории стержней главным является задание внутренней энергии в виде квадратичной формы (7.1). Можно показать, что при любом задании внутренней энергии для стержня с трансверсально изотропной энергией парадокс Николаи не исчезает. Не исчезают и стационарные вращения в эластике Эйлера, которые, по существу, и являются причиной возникновения парадокса Николаи.

При переходе от общей теории стержней к модели нерастяжимого стержня (14.1) были сделаны три допущения. Первое: пренебрегалось деформацией поперечного сдвига. Второе: отбрасывались деформации растяжения. И, наконец, третье допущение состояло в игнорировании инерции вращения. Интуиция подсказывает (а во многих случаях и может быть доказано), что первые два допущения вполне оправданы. Более того, отказ от этих допущений не избавляет ни от парадокса Николаи, ни от возникновения стационарных вращений. Остается третье допущение. Оно принимается во всех работах по теории стержней. При плоских движениях учет инерции вращения оказывается важным только при анализе высокочастотных сдвиговых колебаний. В нашем случае речь идет о медленных движениях, в которых, казалось бы, учет инерции вращения совершенно не важен. С другой стороны, при рассмотрении стационарных вращений в эластике Эйлера речь шла о пространственных движениях, которые исследованы очень мало. Поэтому именно это обстоятельство и требует отдельного рассмотрения. К сожалению, в общем случае исследовать столь сложные уравнения весьма затруднительно. Однако нетрудно убедиться, что при учете инерции вращения решение вида (14.3) оказывается невозможным.

15. Простейшая модель эластики Эйлера

Чтобы лучше понять физическую сущность задачи о сжатии консольного стержня продольной силой, рассмотрим предельно упрощенную постановку задачи, в которой, тем не менее, сохраняются основные особенности исходной задачи. Материальную точку массой m поместим в безынерционную трубку, в которой она может совершать одномерные движения без трения о стенки. Основание трубки соединим с материальной точкой пружиной жесткости c_1, длина которой в ненапряженном состоянии равна l. Трубку расположим вертикально так, что материальная точка находится в верхнем положении. Основание трубки установим на цилиндрический шарнир, ось которого ортогональна оси трубки. Наконец, ограничим повороты трубки вокруг оси шарнира посредством пружины, работающей на поворот и ненапряженной, когда трубка находится в вертикальном положении, причем груз расположен в верхнем положении. На материальную точку действует сила тяжести.

Получили консервативную систему, уравнения движения которой можно вывести методом Лагранжа. Функция Лагранжа рассматриваемой системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{1}{2}c_1(l-s)^2 - \frac{1}{2}c_2\varphi^2 - mgs\cos\varphi, \qquad (15.1)$$

где φ есть угол наклона трубки, отсчитываемый от вертикали; s — длина пружины в актуальном положении, жесткости пружин c_1 и c_2 будут выбраны позднее.

Выпишем уравнения движения

$$m\ddot{\delta} + m(l-\delta)\dot{\varphi}^2 + c_1\delta - mg\cos\varphi = 0, \quad \delta \equiv l - s,$$

$$\left[m(l-\delta)^2\dot{\varphi}\right]^{\cdot} + c_2\varphi - mg(l-\delta)\sin\varphi = 0. \tag{15.2}$$

Положения равновесия системы находятся как решения уравнений статики

$$c_1\delta - mg\cos\varphi = 0, \quad c_2\varphi - mg(l-\delta)\sin\varphi = 0. \tag{15.3}$$

Система (15.3) всегда имеет следующее решение при $\varphi = 0$:

$$mg = c_1\delta_1, \quad \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = A/l \equiv EF/l. \tag{15.4}$$

Здесь жесткость пружины c_1 выбрана так, чтобы получить относительное удлинение в соответствие с теорией стержней. Последняя применима только для малых деформаций растяжения-сжатия. Это же допущение следует принять и в рассматриваемой модели. Иными словами, будем считать, что $\delta = mg/A \ll 1$. В таком случае систему (15.3) можно упростить

$$A\delta - mgl\cos\varphi = 0, \quad c_2\varphi - mgl\sin\varphi = 0. \tag{15.5}$$

Система (15.5) на самом деле качественно отличается от системы (15.3), но упрощения, присущие ей, в точности соответствуют тем упрощениям, которые были использованы при анализе эластики Эйлера.

Второе решение системы (15.5) имеется только в том случае, если вес груза превышает некое критическое значение, которое определяется неравенством

$$mgl \geq c_2 \quad \Rightarrow \quad mg \geq (mg)_{cr} \simeq \frac{c_2}{l}.$$

Будем исходить из того, что критический вес совпадает с эйлеровой критической силой (13.17)

$$\frac{c_2}{l} = \frac{\pi^2 C_2}{4l^2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{\pi^2}{4l}C_2,$$

где C_2 есть жесткость стержня на изгиб.

Итак, второе решение системы (15.3):

$$A\delta_2 = mgl\cos\psi, \quad \varphi_2 = \psi,$$

где ψ есть ненулевое решение уравнения

$$\frac{\pi^2}{4l^2}C_2\varphi = mg\sin\varphi, \quad mg > \frac{\pi^2}{4l^2}C_2. \tag{15.6}$$

Исследуем устойчивость найденных равновесных конфигураций, методом наложения малых движений

$$\delta(s,t) = \delta_\alpha(s) + \varepsilon\, l\eta(s,t), \quad \varphi(s,t) = \varphi_\alpha(s) + \varepsilon\zeta(s,t), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad \alpha = 1,2.$$

Подставляя эти представления в уравнения движения (15.2), получаем

$$\varepsilon m\, l\ddot{\eta} + \varepsilon^2 ml\dot{\zeta}^2 + c_1(\delta_\alpha + \varepsilon\, l\eta) - mg\cos(\varphi_\alpha + \varepsilon\zeta) = 0,$$

$$\varepsilon ml^2\ddot{\zeta} + c_2(\varphi_\alpha + \varepsilon\zeta) - mgl\sin(\varphi_\alpha + \varepsilon\zeta) = 0. \tag{15.7}$$

Полагая в этих уравнениях $\varepsilon = 0$, получаем уравнения статики, которые удовлетворяются тождественно. Дифференцируя уравнения (15.7) по ε и полагая в них $\varepsilon = 0$, получаем так называемые уравнения в вариациях

$$ml\ddot{\eta} + c_1 l\eta + mg\zeta\sin\varphi_\alpha = 0,$$

$$ml^2\ddot{\zeta} + (c_2 - mgl\cos\varphi_\alpha)\,\zeta + mgl\eta\sin\varphi_\alpha = 0. \tag{15.8}$$

Для первой (строго вертикальной) равновесной конфигурации уравнения в вариациях принимают вид

$$m\ddot{\eta} + c_1\eta = 0, \quad ml^2\ddot{\zeta} + (c_2 - mgl)\,\zeta = 0.$$

При выполнении неравенства

$$c_2 \le mgl$$

имеем неограниченное нарастание амплитуды угловых колебаний во времени, т. е. неустойчивость.

Если вес груза не превосходит критическое значение, т. е. последнее неравенство не выполняется, то равновесие при чистом сжатии устойчиво. Выпишем уравнения в вариациях для второй равновесной конфигурации. После небольших преобразований и введения безразмерных переменных их можно записать в следующем виде:

$$\ddot{\eta} + \eta + \alpha\,\zeta = 0, \quad \ddot{\zeta} + h_0^2\zeta + \alpha\,\eta = 0 \quad \dot{f} \equiv df/d\tau. \tag{15.9}$$

В уравнениях (15.9) введены обозначения

$$h_0^2 = \frac{\pi^2}{4}\frac{C_2}{Al^2}, \quad mg = h_0^2 An, \quad \alpha = h_0^2 n\sin\psi, \quad t = \sqrt{\frac{ml}{A}}\,\tau,$$

а величина ψ находится как ненулевое решение уравнения

$$\psi = n \sin \psi, \quad n > 1.$$

Если параметры A и C_2 воспринимать как жесткости тонкого стержня на растяжение и изгиб соответственно, то параметр h_0^2 весьма мал. Решение системы (15.9) ищем в стандартной форме

$$\eta = D_1 \exp(i\omega\tau), \quad \zeta = D_2 \exp(i\omega\tau), \quad i^2 = -1.$$

Для того чтобы исследуемая равновесная конфигурация была устойчивой относительно малых возмущений, необходимо и достаточно, чтобы частотный параметр ω был бы вещественным, т. е. $\omega^2 > 0$. Для определения постоянных D_1 и D_2 имеем систему уравнений

$$(1 - \omega^2)D_1 + \alpha D_2 = 0, \quad \alpha D_1 + \left(h_0^2 - \omega^2\right) D_2 = 0.$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, получаем частотное уравнение

$$\omega^4 - \left(1 + h_0^2\right) \omega^2 + h_0^2 - \alpha^2 = 0.$$

Приближенные значения корней этого уравнения, справедливые при малых h_0^2, имеют вид

$$\omega_l^2 = h_0^2 \frac{1 - h_0^2 \psi^2}{1 + h_0^2}, \quad \omega_h^2 = 1 + h_0^2 \left(1 - \frac{1 - h_0^2 \psi^2}{1 + h_0^2}\right).$$

Квадраты собственных частот положительны, это означает, что отклоненная равновесная конфигурация при выполнении неравенства $n > 1$ устойчива. Угловым колебаниям системы отвечают низкие частоты ω_l^2, которые с ростом равновесного угла ψ, т. е. с ростом веса груза, незначительно уменьшаются. Высокие частоты отвечают колебаниям груза вдоль трубки. С ростом веса груза они незначительно увеличиваются.

16. Динамика скрученного стержня. Парадокс Николаи

16.1. Вводные замечания

Тонкие стержни часто выступают в роли элементов тех или иных конструкций. Например, в ультрацентрифугах, работающих в диапазоне 150–400 тысяч оборотов в минуту, ротор устанавливается на гибком стержне и приходится рассматривать совместную динамику ротора (твердого тела) и тонкого стержня. Это очень трудная для анализа проблема. Ситуация заметно упрощается, если стержень считать безынерционным. Вообще, исследование динамики и устойчивости вращающихся валов относится к числу важнейших технических проблем, некоторые из которых обсуждаются в книге [2].

16.2. Решение классической задачи

Постановка задачи

Рассмотрим следующую динамическую задачу для нерастяжимого гибкого стержня

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{N}' = \rho F \ddot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \tag{16.1}$$

Примем, что стержень имеет круглое поперечное сечение. В этом случае соотношение упругости для момента может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{M} = C_1 \mathbf{\Phi} + (C_3 - C_1)\,(\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}')\,\mathbf{R}', \tag{16.2}$$

где C_1 и C_3 суть жесткости стержня на изгиб и кручение, соответственно.

Считаем, что основание стержня заделано, а свободный конец нагружен следящим моментом. В этом случае краевые условия имеют вид

$$s = 0: \ \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = L\mathbf{R}'. \tag{16.3}$$

Начальные условия обсудим позднее. Дифференцируя первое из уравнений (16.1) по координате и используя второе уравнение, получаем

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi} = (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}')\ \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}''. \tag{16.4}$$

Отсюда и из уравнения (16.2) следуют равенства

$$\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{R}'' = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = 0.$$

Умножая последнее уравнение в системе (16.1) скалярно на $\mathbf{R}'$, получаем так называемый интеграл Пуассона (1816 г.)

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{R}' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' - \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}'' = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}')' = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = f(t).$$

С учетом интеграла Пуассона и последнего из краевых условий (16.3) выражение для момента (16.2) переписываем в виде

$$\mathbf{M} = L\,\mathbf{R}' + C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}''(l, t) = \mathbf{0}. \tag{16.5}$$

Теперь мы можем сформулировать постановку задачи в терминах тензора поворота и вектора $\mathbf{N}$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \ \mathbf{N}'' = \rho\, F\, (\mathbf{R}')^{\cdot\cdot}, \ \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \ \mathbf{M} = L\,\mathbf{R}' + C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}''. \tag{16.6}$$

К уравнениям (16.6) следует присоединить краевые условия

$$s = 0: \ \mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = L\mathbf{R}'. \tag{16.7}$$

Первое из условий (16.7) следует из третьего уравнения системы (16.1) и первого краевого условия (16.3). Задачу (16.6)–(16.7) мы и будем решать в дальнейшем.

Решение статической задачи

Начнем с решения статической задачи. В этом случае уравнения (16.6) интегрируются элементарно:

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = L\,\mathbf{R}' = L\,\mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = s\,\mathbf{t}, \quad \mathbf{\Phi} = (L/C_3)\mathbf{t}.$$

Осталось найти тензор поворота

$$\mathbf{P}' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{P} = (L/C_3)\mathbf{t} \times \mathbf{P}.$$

Отсюда следует выражение для тензора поворота

$$\mathbf{P} = (1 - \cos\varphi)\mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \cos\varphi\mathbf{E} + \sin\varphi\mathbf{t} \times \mathbf{E}, \quad \varphi \equiv L\,s/C_3.$$

Построенная равновесная конфигурация является единственной.

Малые колебания скрученного стержня

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ стержень был незначительно изогнут, так что угол между касательной к деформированной упругой линии является малым. При $t > 0$ движение стержня описывается уравнениями (16.6) и краевыми условиями (16.7). По крайней мере, при малых временах ось стержня будет оставаться близкой к прямолинейной форме. Исследуем эти малые движения. Тензор поворота будем искать, используя его представление через углы Эйлера [3]

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}[\psi(s,t)\mathbf{t}] \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s,t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{Q}[\varphi(s,t)\mathbf{t}], \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = 0, \tag{16.8}$$

где ψ, ϑ, φ суть углы прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно.

Легко установить геометрический смысл угла нутации ϑ. Для этого достаточно вычислить скалярное произведение

$$\mathbf{R}' \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s,t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{t} = \cos\vartheta(s,t).$$

По предположению этот угол мал при $t = 0$. Следовательно, он будет оставаться малым, по крайней мере, при незначительных промежутках времени. Чтобы использовать это обстоятельство, перепишем представление тензора поворота (16.8) в тождественном виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}_*) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{t}), \quad \beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{e}_* \equiv \mathbf{Q}(\psi \mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}. \tag{16.9}$$

Воспользуемся теперь малостью угла ϑ:

$$\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}_*) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\vartheta} \equiv \vartheta\, \mathbf{e}_*.$$

Хотя модуль вектора $\boldsymbol{\vartheta}$ мал, он может поворачиваться на произвольный конечный угол прецессии ψ. Ограничиваясь линейными членами по $\boldsymbol{\vartheta}$, получаем представления

$$\mathbf{R}' = \mathbf{t} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\vartheta}' + \beta' \mathbf{R}', \quad \mathbf{M} = C_3 \beta' \mathbf{R}' + C_1 \boldsymbol{\vartheta}'. \tag{16.10}$$

Сравнивая выражения (16.5) и (16.10), получаем

$$\beta' = L/C_3 \quad \Rightarrow \quad \beta = L\, s/C_3. \tag{16.11}$$

Уравнения (16.6) в линейном приближении принимают вид

$$\mathbf{N}'' = \rho\, F \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t}, \quad C_1 \boldsymbol{\vartheta}'' + L \boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \tag{16.12}$$

где $\mathbf{N}$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ ортогональны $\mathbf{t}$.

К уравнениям (16.12) необходимо присоединить краевые условия (16.7), которые в линейном приближении принимают вид

$$s = 0: \ \mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \vartheta = 0, \quad \beta = 0; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta}' = \mathbf{0}. \tag{16.13}$$

Удобнее перейти к безразмерным переменным

$$\mathbf{N} = (C_1/l^2) \mathbf{n}, \quad s = l\, x, \quad \alpha \equiv L l / C_1.$$

Тогда система уравнений (16.12) принимает вид

$$\mathbf{n}'' = \left(\rho\, F l^4 / C_1\right) \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\vartheta}'' + \alpha \boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad f' \equiv \partial f / \partial x. \tag{16.14}$$

Решение системы (16.13) ищем в форме

$$\mathbf{n} = \exp(-\mu_0 t) \mathbf{Q}(\omega t\, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{A}(s), \quad \boldsymbol{\vartheta} = \exp(-\mu_0 t) \mathbf{Q}(\omega t\, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{B}(s),$$

где μ_0 и ω суть вещественные числа; $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — вещественные векторы; $\mathbf{Q}$ — тензор поворота,

$$\dot{\mathbf{Q}}(\omega t\, \mathbf{t}) = \omega \mathbf{t} \times \mathbf{Q}(\omega t\, \mathbf{t}), \quad \det \mathbf{Q} = 1, \quad \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}).$$

Если окажется, что $\mu_0 \geq 0$, то решение будет ограничено во времени, т. е. прямолинейная форма равновесия скрученного стержня будет устойчивой. Дифференцируя $\boldsymbol{\vartheta}$ по времени, получаем

$$\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} = -\exp(-\mu_0 t)\mathbf{Q}(\omega t\,\mathbf{t}) \cdot \left[\left(\omega^2 - \mu_0^2\right)\mathbf{B} + 2\mu_0\omega\mathbf{t} \times \mathbf{B}\right].$$

Подстановка этих представлений в систему (16.13) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}'' - \left(\lambda^2 - \mu^2\right)\mathbf{t} \times \mathbf{B} + 2\lambda\mu\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t} \times \mathbf{A} + \mathbf{B}'' - \alpha\mathbf{t} \times \mathbf{B}' = \mathbf{0}, \tag{16.15}$$

где введены обозначения

$$\lambda \equiv l^2\omega\sqrt{\frac{\rho F}{C_1}}, \quad \mu \equiv l^2\mu_0\sqrt{\frac{\rho F}{C_1}}.$$

Систему (16.15) удобнее переписать в другой форме

$$\mathbf{t} \times \left[\mathbf{B}'''' + \alpha\mathbf{B}''' - \left(\lambda^2 - \mu^2\right)\mathbf{B}\right] + 2\lambda\mu\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{t} \times \mathbf{B}'' + \alpha\mathbf{B}'. \tag{16.16}$$

Частные решения первого из уравнений системы (16.16) ищутся в виде

$$\mathbf{B}(x) = \exp(qx)\mathbf{S}(px\,\mathbf{t}) \cdot \mathbf{b},$$

где q и p суть вещественные числа; $\mathbf{b}$ — постоянный вещественный вектор; $\mathbf{S}$ — тензор поворота.

Для указанных частных решений справедливы представления

$$\mathbf{B}' = q\mathbf{B} + p\mathbf{t} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}'' = (q^2 - p^2)\mathbf{B} + 2qp\mathbf{t} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}''' = q(q^2 - 3p^2)\mathbf{B} -$$

$$-p(p^2 - 3q^2)\mathbf{t} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}'''' = (p^4 + q^4 - 6q^2p^2)\mathbf{B} + 4qp(q^2 - p^2)\mathbf{t} \times \mathbf{B}.$$

Подстановка этих выражений в систему (16.16) дает уравнение для постоянного вектора $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned}&\left[p^4 + q^4 - 6p^2q^2 + \alpha q(q^2 - 3p^2) - (\lambda^2 - \mu^2)\right]\mathbf{b} + \\ &\qquad + \left[4pq(q^2 - p^2) - \alpha p(p^2 - 3q^2) - 2\lambda\mu\right]\mathbf{t} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{t} \times \mathbf{b}$ ортогональны, то должны выполняться равенства

$$\begin{gathered}p^4 + q^4 - 6p^2q^2 + \alpha q(q^2 - 3p^2) - (\lambda^2 - \mu^2) = 0, \\ 4pq(q^2 - p^2) - \alpha p(p^2 - 3q^2) - 2\lambda\mu = 0.\end{gathered} \tag{16.17}$$

Система (16.17) после введения комплексных переменных

$$u = q + ip, \quad \nu = \mu + i\lambda$$

эквивалентна одному уравнению[2]

$$u^4 + \alpha u^3 - \nu^2 = 0. \qquad (16.18)$$

16.3. Учет инерции вращения

Постановка задачи

Рассмотрим следующую динамическую задачу для нерастяжимого гибкого стержня. Выпишем уравнения движения (3.1), (3.2)

$$\mathbf{N}''_\gamma(s,t) = \rho F \ddot{\mathbf{R}}'_\gamma, \quad \mathbf{M}'_\gamma + \mathbf{R}'_\gamma \times \mathbf{N}_\gamma = \rho_0 \left(\boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}. \qquad (16.19)$$

В уравнениях (16.19) индекс γ поставлен просто для удобства. в дальнейшем мы от него избавимся.

Стержень считаем нерастяжимым, т. е. сохраняем условия

$$\mathbf{R}'_\gamma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{M}_\gamma = C_3 \left(\boldsymbol{\Phi}_\gamma \cdot \mathbf{R}'_\gamma\right) \mathbf{R}'_\gamma + C_1 \mathbf{R}'_\gamma \times \mathbf{R}''_\gamma, \qquad (16.20)$$

где C_1 и C_3 суть жесткости стержня на изгиб и кручение, соответственно.

Тензор инерции считаем трансверсально изотропным

$$\rho_0 \, \boldsymbol{\Theta}_2 = \Theta_1 \mathbf{E} + (\Theta_3 - \Theta_1) \, \mathbf{R}'_\gamma \otimes \mathbf{R}'_\gamma.$$

Считаем, что основание стержня заделано, а свободный конец нагружен следящим моментом. В этом случае краевые условия имеют вид

$$s = 0: \ \mathbf{R}_\gamma = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \ \mathbf{N}_\gamma = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_\gamma = L\mathbf{R}'_\gamma. \qquad (16.21)$$

Начальные условия обсудим позднее.

Решение статической задачи

Начнем с решения статической задачи. В этом случае уравнения (16.19)–(16.21) интегрируются элементарно:

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = L\,\mathbf{R}' = L\,\mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = s\,\mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\Phi} = (L/C_3)\mathbf{t}. \qquad (16.22)$$

[2]На этом рукопись обрывается. К сожалению, болезнь не позволила П. А. Жилину закончить работу над этим подразделом. (Примеч. ред.)

Осталось найти тензор поворота

$$\mathbf{P}' = \mathbf{\Phi} \times \mathbf{P} = (L/C_3)\mathbf{t} \times \mathbf{P}.$$

Отсюда немедленно следует выражение для тензора поворота

$$\mathbf{P} = (1 - \cos\beta)\mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \cos\beta\mathbf{E} + \sin\beta\mathbf{t} \times \mathbf{E}, \quad \beta \equiv L\,s/C_3. \tag{16.23}$$

Построенная равновесная конфигурация является единственной.

Малые колебания скрученного стержня

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ стержень был незначительно изогнут, так что угол между касательной к деформированной упругой линии является малым. При $t > 0$ движение стержня описывается уравнениями (16.19) и краевыми условиями (16.21). По крайней мере при незначительных промежутках времени ось стержня будет оставаться близкой к прямолинейной форме. Исследуем эти малые движения. Тензор поворота будем искать через углы Эйлера [3]

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}[\psi(s,t)\mathbf{t}] \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s,t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{Q}[\varphi(s,t)\mathbf{t}], \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = 0, \tag{16.24}$$

где ψ, ϑ, φ суть углы прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно; единичный вектор $\mathbf{e}$ может иметь любое направление, ортогональное $\mathbf{t}$.

Легко установить смысл угла нутации ϑ. Для этого достаточно вычислить скалярное произведение

$$\mathbf{R}'_\gamma \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s,t)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{t} = \cos\vartheta(s,t).$$

По предположению этот угол мал при $t = 0$. Следовательно, он будет оставаться малым, по крайней мере, при малых временах. Чтобы использовать это обстоятельство, перепишем тензор поворота в тождественном виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}_*) \cdot \mathbf{Q}(\beta\mathbf{t}), \quad \beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{e}_* \equiv \mathbf{Q}(\psi\mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}. \tag{16.25}$$

Воспользуемся теперь малостью угла ϑ.

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}_*) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\vartheta}_\gamma \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\vartheta}_\gamma \equiv \vartheta\,\mathbf{e}_*.$$

Хотя модуль вектора $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ мал, но он может поворачиваться на произвольный конечный угол прецессии ψ. Ограничиваясь линейными членами по $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$, получаем представления

$$\mathbf{R}'_\gamma = \mathbf{t} + \boldsymbol{\vartheta}_\gamma \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{\Phi}_\gamma = \boldsymbol{\vartheta}'_\gamma + \beta'\mathbf{R}'_\gamma, \quad \mathbf{M}_\gamma = C_3\beta'\mathbf{R}'_\gamma + C_1\boldsymbol{\vartheta}'_\gamma. \tag{16.26}$$

При вычислении угловой скорости следует помнить о возможном наличии вращений актуальной конфигурации стержня. Это означает, что углы прецессии ψ и собственного вращения φ имеют следующее строение:

$$\psi(s,t) = \gamma(t) + \tilde{\psi}(s,t), \ \ \varphi(s,t) = -\gamma(t) + \tilde{\phi}(s,t), \ \ \beta(s,t) = \tilde{\psi}(s,t) + \tilde{\varphi}(s,t).$$

Видим, что угол кручения β не зависит от угла поворота γ, но угол прецессии ψ и, следовательно, вектор поворота $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ зависят от γ. При этом следует иметь в виду, что угол γ и производные от него по времени не являются малыми.

Вектор поворота $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ представим в следующем виде:

$$\boldsymbol{\vartheta}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\vartheta}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \vartheta(s,t)\tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{Q}\left[\tilde{\psi}(s,t)\mathbf{t}\right] \cdot \mathbf{e}. \tag{16.27}$$

Аналогичным образом преобразуются представления (16.26)

$$\mathbf{R}'_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \mathbf{R}', \quad \boldsymbol{\Phi}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{M}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{R}' = \mathbf{t} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\vartheta}' + \beta'\mathbf{R}', \quad \mathbf{M} = C_3\beta'\mathbf{R}' + C_1\boldsymbol{\vartheta}'. \tag{16.28}$$

Вычислим угловую скорость, отвечающую тензору поворота (16.26), и другие необходимые величины

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \left(\dot{\beta}\mathbf{R}' + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\gamma}\mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta}\right),$$

$$\mathbf{t} \times \ddot{\mathbf{R}}' = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times \left(\ddot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right],$$

$$\begin{aligned}\rho_0\left(\boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot} = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \Big[\Theta_3\ddot{\beta}\mathbf{R}' + \Theta_1\left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma}\mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \ddot{\gamma}\mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta}\right) + \\ + \Theta_3\dot{\beta}\left(\dot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t}\right)\Big].\end{aligned} \tag{16.29}$$

Вектор усилия $\mathbf{N}_\gamma$ представим в следующей форме:

$$\mathbf{N}_\gamma = \mathbf{Q}(\gamma\mathbf{t}) \cdot \mathbf{N}.$$

Уравнения (16.19) в линейном приближении принимают вид

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F\left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times \left(\ddot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right],$$

$$C_3\beta''\mathbf{R}' + C_1\boldsymbol{\vartheta}'' + C_3\beta'\boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} =$$

$$= \Theta_3 \ddot{\beta} \mathbf{R}' + \Theta_1 \left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma} \mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \ddot{\gamma} \mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta} \right) + \Theta_3 \dot{\beta} \left(\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t} \right),$$

где $\mathbf{N}$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ ортогональны $\mathbf{t}$ между собой.

Из этих уравнений видим, что задачи кручения и изгиба разделяются. Для задачи кручения получаем волновое уравнение

$$C_3 \beta'' = \Theta_3 \ddot{\beta}, \quad \beta(0) = 0, \quad \beta'(l) = L/C_3. \tag{16.30}$$

Для задачи изгиба получаем следующую систему:

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times \left(\ddot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma} \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \right) \right],$$

$$C_1 \boldsymbol{\vartheta}'' + C_3 \beta' \boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} = \tag{16.31}$$

$$= \underline{\Theta_1 \left(\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\gamma} \mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \ddot{\gamma} \mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta} \right)} + \Theta_3 \dot{\beta} \left(\dot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \times \mathbf{t} \right).$$

К уравнениям (16.31) необходимо присоединить краевые условия, которые в линейном приближении записываются в следующей форме:

$$s = 0: \ \mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0}; \qquad s = l: \ \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\vartheta}' = \mathbf{0}. \tag{16.32}$$

Систему (16.31) можно немного упростить. В правой части второго уравнения этой системы содержится подчеркнутое слагаемое. Оно существенно только при рассмотрении высокочастотных колебаний, которые без учета деформации поперечного не могут быть правильно описаны, нас эти колебания не интересуют. Это слагаемое должно быть отброшено. Если бы мы все же захотели рассмотреть высокочастотные колебания и учли бы деформации растяжения и сдвига, то на акустический спектр подчеркнутые в (16.31) слагаемые не оказали бы никакого влияния и их можно было бы отбросить. Они существенны только при описании быстрых движений. Формальным поводом для отбрасывания подчеркнутых в (16.31) слагаемых становится следующее рассуждение. Если из второго уравнения системы (16.31) исключить подчеркнутые слагаемые с помощью первого уравнения этой же системы, то в получившемся уравнении появится слагаемое, которое заведомо много меньше слагаемого $\mathbf{t} \times \mathbf{N}$, содержащегося в этом уравнении. Поэтому его можно и даже необходимо отбросить.

Таким образом, вместо системы (16.31) допустимо рассматривать более простую систему

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times \left(\ddot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma} \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \right) \right],$$

$$C_1\boldsymbol{\vartheta}'' + C_3\beta'\boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} = \Theta_3\dot{\beta}\left(\dot{\gamma}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}\right). \qquad (16.33)$$

Переход к классическим уравнениям, впервые исследованным А. Трешем (1952) и описанным в книге В.В. Болотина [2], происходит при принятии следующих ограничений:

$$\gamma = 0, \quad \beta = Ls/C_3, \quad \dot{\beta} = 0. \qquad (16.34)$$

Принятие первого из этих ограничений возможно всегда. Его использование всего лишь затрудняет как анализ основной системы, так и интерпретацию получаемых результатов. Принятие второго ограничения также возможно, но при этом рассматривается частный случай возмущений, относительно которых исследуется устойчивость, а именно: второе ограничение соответствует следующим начальным условиям для задачи кручения (16.30):

$$t = 0: \ \beta(s, 0) = Ls/C_3, \quad \dot{\beta}(s, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(s, t) = Ls/C_3. \qquad (16.35)$$

Таким образом, классическая система следует из уравнений (16.33) и имеет вид

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F \ddot{\boldsymbol{\vartheta}}, \quad C_1\boldsymbol{\vartheta}'' - L\mathbf{t} \times \boldsymbol{\vartheta}' + \mathbf{t} \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \qquad (16.36)$$

Краевые условия для системы (16.36) имеют прежний вид (16.32).

Итак, с формальной точки зрения системы (16.33) и (16.36) эквивалентны для частного случая возмущений (16.35). Следует при этом иметь в виду, что в системе (16.36) вектор $\boldsymbol{\vartheta}$ соответствует вектору $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ в системе (16.33). Теперь представим себе такую ситуацию. Пусть решение задачи (16.33) обладает следующим свойством: $\vartheta \to 0$, $\dot{\gamma} \to \infty$, т. е. по переменной γ имеем неустойчивость. Но с физической точки зрения этот вид неустойчивости совершенно несущественен, ибо неустойчивая переменная исчезает в окончательном решении, как это видно из выражения (16.27). Совершенно иначе обстоит дело при анализе системы (16.36). В ней неустойчивая переменная γ входит в состав вектора $\boldsymbol{\vartheta}$. Поэтому, если ограничиться только вычислением собственных частот и не проводить дальнейший анализ получившегося решения, мы получим вывод о неустойчивости равновесной конфигурации скрученного стержня при сколь угодно малом значении крутящего момента, т. е. придем к так называемому парадоксу Николаи[3]. В дальнейшем мы будем рассматривать систему (16.33), но для переменной β примем начальные

[3]**Историческая справка.** О неустойчивости равновесной конфигурации стержня, скрученного следящим или мертвым моментом, при сколь угодно малом значении крутящего момента впервые было доложено на двух заседаниях Ленинградского механического общества 26 мая и 29 сентября 1927 г. профессором Политехнического института Е.Л. Николаи. Опубликована эта работа была в Известиях Политехнического института в 1928 г. На заседаниях присутствовали выдающиеся ленинградские ученые, среди которых

условия (16.32). Иными словами, проанализируем следующую систему:

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{N})'' = \rho F \left[\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \dot{\gamma}^2 \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{t} \times \left(\ddot{\gamma} \boldsymbol{\vartheta} + 2\dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{\vartheta}} \right) \right],$$

$$C_1 \boldsymbol{\vartheta}'' + L\boldsymbol{\vartheta}' \times \mathbf{t} + \mathbf{t} \times \mathbf{N} = 0. \qquad (16.37)$$

Решение системы (16.36) при краевых условиях (16.32) было построено А. Трешем (1952), который показал, что оно содержит экспоненциально растущие во времени слагаемые при любом сколь угодно малом значении крутящего момента L. Отсюда вытекает парадоксальный вывод о том, что равновесная конфигурация скрученного стержня, определяемая формулами (16.22) и (16.23), неустойчива при сколь угодно малом значении крутящего момента L. Это явление известно в механике под названием парадокса Николаи, поскольку именно он впервые обнаружил его, но Е.Л. Николаи рассматривал безынерционный стержень с точечной массой на свободном конце стержня. Парадокс Николаи объясняют неконсервативностью задачи о кручении стержня, подразумевая при этом, что в систему накачивается энергия. Г. Циглер в работе [1] приводит подтверждающие это утверждение правдоподобные рассуждения. Однако такое объяснение, хотя и возможно, трудно признать всеобъемлющим. Например, в работе [14] показано, что парадокс Николаи имеет место в задаче о кручении стержня консервативным следящим моментом, когда накачка энергии в систему заведомо невозможна. Поэтому необходимо искать и другие объяснения. К тому же, результаты А. Треша, воспроизведенные в работе [2], трудно признать удовлетворительными с чисто математической точки зрения, поскольку он учел только половину корней характеристического уравнения[4]. Впрочем, если все сделать правильно, то основной вывод А. Треша не изменится.

были, в частности П.Ф. Папкович и А.И. Лурье. На первом заседании сообщение Е.Л. Николаи буквально шокировало всех присутствующих, ибо понятие эйлеровой критической силы было хорошо знакомо и понятно всем присутствующим. Все, разумеется, ожидали аналогичного явления и при действии крутящего момента: при малых значениях момента должна быть устойчивость, а при превышении моментом некоторого критического значения — неустойчивость. Однако результат анализа показал, что это не так. Первым, кто указал на возможную причину столь странного поведения стержня при кручении, был П.Ф. Папкович. А именно, он указал, что речь идет о неконсервативной задаче, а следовательно, в систему может накачиваться энергия. Это объяснение примирило присутствующих с парадоксом Николаи. В самом деле, рассмотрим, например, линейный осциллятор со сколь угодно малым внешним возбуждением, пропорциональным скорости

$$m\ddot{x} + c\,x = \varepsilon\,\dot{x}, \quad 0 < \varepsilon << 1.$$

В этом случае имеем отрицательное трение и решение экспоненциально нарастает во времени при сколь угодно малом ε. Как бы то ни было, но обсуждаемые сообщения Е.Л. Николаи положили начало новому и чрезвычайно важному разделу механики — теории устойчивости неконсервативных систем.

[4]А. Треш счел возможным не рассматривать комплексно сопряженные корни характеристического уравнения и отвечающие ему частные решения. В общем случае частотное уравнение есть определитель восьмого порядка, а не четвертого. Более того, этот определитель не имеет блочной структуры, поэтому, вообще говоря, он не сводится к вычислению определителя четвертого порядка.

Точное решение системы (16.37) представляется затруднительным. Поэтому обратимся к ее приближенному решению, основанному на специфическом представлении вектора поворота (16.27). С этой целью вычислим производные от вектора поворота (16.27)

$$\boldsymbol{\vartheta}' = \vartheta'\mathbf{e}_* + \underline{\vartheta\tilde{\psi}' \times \mathbf{e}_*} \simeq \vartheta'\mathbf{e}_* \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vartheta}^{(k)} = \vartheta^{(k)}\mathbf{e}_*.$$

В этом выражении подчеркнутое слагаемое имеет второй порядок малости, поскольку функция $\tilde{\psi}$, в отличие от функции $\psi(s,t) = \gamma(t) + \tilde{\psi}(s,t)$, характеризует дополнительное упругое закручивание стержня (основное закручивание характеризуется углом $\beta = \psi + \varphi$) и является малым. По этой причине подчеркнутое слагаемое в линейной теории должно быть отброшено. В то же время функция $\gamma(t)$ малой не является. Совершенно аналогично обстоит дело и с вычислением производных по времени от вектора поворота. Собственно, именно желание выделить немалые вращения и вынудило нас представить вектор поворота $\boldsymbol{\vartheta}_\gamma$ в виде композиции (16.27). Вектор поперечной силы $\mathbf{N}$ представим в виде разложения

$$\mathbf{t} \times \mathbf{N} = N_1\mathbf{e}_* + N_2\mathbf{t} \times \mathbf{e}_*.$$

С учетом всего сказанного систему (16.37) можно переписать в виде[5]

$$N_1''\mathbf{e}_* + N_2''\mathbf{t} \times \mathbf{e}_* = \rho F \left[\left(\ddot{\vartheta} - \dot{\gamma}^2\vartheta \right) \mathbf{e}_* + \left(\ddot{\gamma}\vartheta + 2\dot{\gamma}\dot{\vartheta} \right) \mathbf{t} \times \mathbf{e}_* \right],$$

$$\left(C_1\vartheta'' + N_1 \right) \mathbf{e}_* + \left(N_2 - L\vartheta' \right) \mathbf{t} \times \mathbf{e}_* = 0. \qquad (16.38)$$

[5] На этом рукопись обрывается. К сожалению, болезнь не позволила П. А. Жилину закончить работу над книгой. (Примеч. ред.)

Библиографический список

[1] *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 191 с.

[2] *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.

[3] *Жилин П.А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 275 с.

[4] *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2003. 340 с.

[5] *Жилин П.А.* Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.

[6] *Zhilin P.A.* Mechanics of Deformable Directed Surfaces // Int. J. Solids Structures. 1976. Vol. 12. P. 635–648.

[7] *Жилин П.А.* Основные уравнения неклассической теории оболочек // Динамика и прочность машин / Тр. ЛПИ. 1982. № 386. С. 29–46.

[8] *Биргер И.А.* Прочность•Устойчивость •Колебания / Под ред. Я. Г. Пановко. Т. I. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.

[9] *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

[10] *Лейбович С.* Нелинейные волны / Под ред. А. Сибасс. М.: Мир, 1977. 319 с.

[11] *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.

[12] *Келлер Дж.Б.* Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения / Под ред. С. Антман. М.: Мир, 1974. 254 с.

[13] *Попов Е.П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. Л.-М.: ГИТТЛ, 1948. 170 с.

[14] *Жилин П.А., Сергеев А.Д.* Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления: Тр. СПбГТУ. № 448. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1994. С. 47–56.

Оглавление

ЖИЛИН Павел Андреевич

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Теория тонких упругих стержней

Учебное пособие

Редактор *Е. А. Пряникова*
Технический редактор *А. И. Колодяжная*
Оригинал-макет подготовлен автором

Директор Издательства Политехнического университета *А. В. Иванов*

Свод. темплан 2006 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 953005 — учебная литература

Подписано в печать Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 6,5. Уч. - изд. л. Тираж 300. Заказ 332.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательство Политехнического университета,
член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.
Адрес университета и издательства:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.