Перспективные информационные технологии

А.П. Стахов

Академик Академии инженерных наук Украины,
admin@goldenmuseum.com

КОМПЬЮТЕРЫ ФИБОНАЧЧИ И НОВАЯ ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ: ИСТОРИЯ, ТЕОРИЯ, ПЕРСПЕКТИВЫ

1. О проектах «нетрадиционных» компьютеров

Хотя современная компьютерная наука и технология, казалось бы, давно уже четко определились в своих теоретических основаниях («Неймановские Принципы»: двоичная система счисления, булева логика, двоичный элемент памяти) и на этой основе сделала потрясающие успехи в своем развитии, тем не менее, поиски новых принципов построения компьютеров продолжаются. Авторы таких «нетрадиционных» подходов с упорством, достойным, казалось бы, другого применения, доказывают преимущества предложенных ими проектов и, как потом оказывается, во многих из этих проектах, действительно, существует рациональное зерно.

К разряду таких «нетрадиционных» компьютерных направлений относится и проект «Компьютера Фибоначчи», предложенный автором настоящей статьи в середине 70-х годов прошлого века. Истории этого направления и перспективам его развития и посвящена настоящая статья.

2. Числа Фибоначчи и «золотое сечение»

«Компьютеры Фибоначчи» – откуда такое оригинальное название? Фибоначчи – это прозвище знаменитого итальянского математика 13-го столетия Леонардо из Пизы, который получил образование в арабских учебных заведениях и был поклонником арабской культуры и математики. И хотя Фибоначчи внес огромный вклад в развитие математики, но, по иронии судьбы, его имя стало известным в истории математики в основном только благодаря знаменитой «задаче о размножении кроликов» [1], которая привела его к открытию интересной числовой последовательности

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots, \tag{1}$$

в которой каждое число равно сумме двух предыдущих [1, 2]. Если i-е число Фибоначчи в последовательности (1) обозначить через F_i, тогда закон построения числовой последовательности (1) можно задать с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}. \tag{2}$$

Ряд (1) мы получим, если воспользуемся следующими начальными условиями:

$$F_1 = F_2 = 1. \tag{3}$$

Числа Фибоначчи обладают удивительной особенностью возникать в самых неожиданных местах. В частности, они лежат в основе ботанического явления «филлотаксиса», законы которого определяют внешние формы сосновой шишки, кактуса, ананаса, пальмового дерева и т.д.

Если взять отношение соседних чисел Фибоначчи, то есть построить числовой ряд: 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, … (который, собственно, и составляет суть «закона филлотаксиса») и устремить эту последовательность в бесконечность, то мы придем к знаменитому иррациональному числу $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$, названному «золотой» или «божественной» пропорцией. Задача о «золотом сечении» пришла к нам из «Начал Евклида», где она описана под названием «деления отрезка в крайнем и среднем отношении». Как известно, решение этой задачи сводится к алгебраическому уравнению:

$$x^2 = x + 1, \tag{4}$$

положительный корень которого и равен золотой пропорции. Заметим, что уравнение (4) называется уравнением золотой пропорции. Непосредственно из уравнения (4) вытекает следующее замечательное свойство золотой пропорции:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \tag{5}$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

На протяжении многих тысячелетий «золотое сечение» и связанные с ним геометрические фигуры, в частности, «пентаграмма», «додекаэдр» и «икосаэдр», были предметом пристального внимания ученых, художников и мыслителей древности и новейшего времени. Среди них – гениальные греки Пифагор, Платон, Евклид и Фидий, великие итальянцы Фибоначчи, Леонардо да Винчи и Лука Пачиоли, гениальный астроном Иоганн Кеплер, знаменитые французские математики Люка и Бине, знаменитые немецкие ученый Цейзинг и геометр Феликс Клейн. В 20-м веке числа Фибоначчи и «золотое сечение» становятся увлечением Алана Тьюринга, создателя теоретической информатики, а также выдающихся русских мыслителей Флоренского и Лосева. Начиная с Древнего Египта, художники, архитекторы, скульпторы и даже музыканты широко использовали «золотую пропорцию» в своих гениальных творениях (Пирамида Хеопса, античный Парфенон, «Джоконда» Леонардо да Винче, «Аппасионата» Бетховена и «Модулор» Корбюзье», картины Шишкина и Константина Васильева), а сама «золотая пропорция» в античной науке и в эпоху Возрождения становится «эстетическим каноном».

3. Алгоритмическая теория измерения, обобщенные числа Фибоначчи и обобщенные золотые сечения

Моей первой математической теорией, изложенной в моей докторской диссертации (1972 г.), была так называемая «алгоритмическая теория измерения» [5, 6]. Одним из ее неожиданных математических результатов, стали так называемые «фибоначчиевые» алгоритмы измерения, основанные на обобщенных числах Фибоначчи или p-числах Фибоначчи. Для задания этих числовых последовательностей зададимся целым неотрицательным числом p (p=0, 1, 2, 3, ...), обозначим n-е p-число Фибоначчи через $F_p(n)$ и будем его вычислять согласно следующей рекуррентной формуле:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \tag{6}$$

при следующих начальных условиях:

$$F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p+1) = 1. \tag{7}$$

Ясно, что рекуррентная формула (6) при начальных условиях (7) задает теоретически бесконечное количество новых числовых рядов, так как каждому p соответствует своя числовая последовательность. Рассмотрим частные случаи числовых последовательностей, порождаемых (6), (7). Пусть p=0. Легко показать, что в этом случае рекуррентная формула (6), (7) «генерирует» двоичный ряд:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., \qquad (8)$$

а при p=1 она «генерирует» ряд Фибоначчи (1).

Если теперь взять отношение соседних p-чисел Фибоначчи $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ и устремить значение n к бесконечности, то в результате мы прийдем к следующему алгебраическому уравнению

$$x^{p+1} = x^p + 1, \qquad (9)$$

положительный корень которого τ_p при заданном p и соответствует искомому отношению двух соседних p-чисел Фибоначчи. Заметим, что уравнение (9) является обощением уравнения золотой пропорции (4), к которому оно сводится при значении p=0. Именно на этом основании числа τ_p были названы мною обобщенными золотыми пропорциями иди золотыми p-пропорциями [5]. Заметим также, что при p=0 золотая p-пропорция τ_p = 2, а при $p\to\infty$ $\tau_p \to 1$; это означает, что уравнение (9) задает бесконечное число математических констант τ_p (золотых p-пропорций), находящихся между 2 и 1.

4. Системы счисления с иррациональными основаниями

Представление Цекендорфа

В 1939 г. бельгийский врач Эдуард Цекендорф, увлечением которого были числа Фибоначчи, опубликовал статью, посвященную так называемым «суммам Цекендорфа». Под *«представлением Цекендорфа»*, называемым также *«кодом Фибоначчи»*, понимается следующий позиционный способ представления чисел [2]:

$$N = a_n F_n + a_{n\text{-}1} F_{n\text{-}1} + ... + a_i F_i + ... + a_1 F_1, \qquad (10)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда представления; n – разрядность представления; F_i – число Фибоначчи (вес разряда), задаваемое с помощью рекуррентного соотношения (2), (3).

Доказано, что с помощью n-разрядного фибоначчиевого представления (10 можно представить F_{n+2} целых чисел в диапазоне от 0 (минимальное число) до F_{n+2} -1 (максимальное число). Основным свойством представления (10) является *избыточность,* которая выражается в множественности фибоначчиевых представлений чисел. За исключением минимального числа 0=00…0 и максимального числа N_{max}=11…1, все остальные числа из диапазона [0 - F_{n+2} -1] имеют множественное представление.

Р-коды Фибоначчи

Уже в моей докторской диссертации (1972 г.) были введены в рассмотрение так называемые p-коды Фибоначчи, под которым понимался следующий способ позиционного представления натуральных чисел:

$$N = a_n F_p(n) + a_{n\text{-}1} F_p(n\text{-}1) + ... + a_i F_p(i) + ... + a_1 F_p(1), \qquad (11)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (11); n – число двоичных разрядов; $F_p(i)$ – вес i-го разряда, то есть p-число Фибоначчи, задаваемое рекуррентным соотношением (6), (7).

Заметим, что представление (11) задает теоретически бесконечное число «двоичных» представлений, так как каждому p соответствует свое представление. Любопытно, что при p=0 представление (11) сводится к классическому двоичному представлению для целых чисел, при p=1 – к «представлению Цекендорфа»

(10), а при p=∞ - к так называемому «унитарному» коду, то есть представлению натурального числа в виде суммы единиц. Таким образом, введенные мною p-коды Фибоначчи являются весьма широким обобщением классического двоичного кода и «унитарного» кода, которые являются крайними частными случаями кода (11).

Система счисления Бергмана

Однако, наиболее революционным предложением в современной теории систем счисления по праву можно считать систему счисления с иррациональным основанием, предложенную в 1957 г. американским математиком Джорджем Бергманом [3] и названную им *«Тау-системой»*:

$$A = \sum_i a_i \tau^i \ , \qquad (12)$$

где A – произвольное действительное число, a_i – двоичные цифры, 0 или 1, i = 0, ±1, ±2, ±3 …, τ^i – вес i-й цифры в представлении (12), τ - основание системы счисления. Любопытно отметить, что свою необычную систему счисления Джордж Бергман разработал в возрасте 12 лет! Несмотря на молодость, его статья по новой системе счисления [3] была опубликована в весьма престижном математическом журнале, и по этому поводу широко известный публицистический журнал "Times" даже взял интервью у юного математического гения Америки. Любопытно, что сам Бергман не понял революционного значения своего математического открытия для развития компьютерной науки.

На первый взгляд кажется, что «система Бергмана» (12) не представляет собой ничего особенного по сравнению с традиционным позиционным представлением, но это только на первый взгляд. Вся суть состоит именно в том, что основанием системы счисления является золотая пропорция $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, обладающая математическим свойством (5).

Коды золотой пропорции

Свое дальнейшее развитие система счисления Бергмана получила в моих работах [6-8, 11]. В книге [6] была исследованы системы счисления следующего вида:

$$A = \sum_i a_i \tau_p^i \ , \qquad (13)$$

где A – некоторое действительное число, τ_p - основание системы счисления (13), $a_i \in \{0, 1\}$, i = 0, ±1, ±2, ±3, … .

Заметим, что формула (13) задает бесконечное число новых двоичных представлений действительных чисел, так как каждому p соответствует свое двоичное представление. В частности, при p=0 представление (13) сводится к классическому двоичному представлению, лежащему в основе современных компьютеров, а при p=2 – к системе счисления Бергмана (12). Заметим также, что, за исключением случая p=0 (классическая двоичная система счисления), все остальные системы счисления (13) являются системами счисления с иррациональными основаниями. Это порождает некоторые необычные математические свойства представления (13) и его частного случая (12). Например, доказано, что представление натуральных чисел в виде (12), (13) всегда является конечным, то есть любое натуральное число всегда представляется в виде конечной суммы степеней золотой p-пропорции! Например, для случая p=1 (система счисления Бергмана) имеют место следующие представления для начального отрезка натуральных чисел:

$$1 = 1{,}0;\ 2 = 10{,}01;\ 3 = 100{,}01;\ 4 = 101{,}01;\ 5 = 1000{,}1001;\ 6 = 1010{,}0001;\ 7 = 10000{,}0001$$

и т.д.

Все эти двоичные коды представляют собой ни что иное, как сокращенные изображения некоторых сумм степеней «золотой пропорции». Например, кодовое представление числа 5 = 1000,1001 в системе счисления Бергмана представляет собой ни что иное, как сокращенное изображение следующей суммы:

$$5 = 1000{,}1001 = \tau^3 + \tau^{-1} + \tau^{-4} \qquad (14)$$

Еще раз подчеркнем, что «коды золотой пропорции» (13) переворачивают наши традиционные представления о позиционных системах счисления, более того – традиционное соотношение между числами рациональными и иррациональными. В «кодах золотой пропорции» основанием, то есть началом счисления, являются некоторые иррациональные числа (типа «золотой p-пропорции» τ_p). С помощью таких представлений, частным случаем которых является система счисления Бергмана (2), можно представлять все другие числа, включая натуральные, дробные и иррациональные числа.

Коды Фибоначчи (11) и коды золотой p-пропорции (13) можно рассматривать как некоторое обобщение классической двоичной системы счисления, лежащей в основе современных компьютеров. Для представления чисел они используют те же двоичные символы 0 и 1 и по форме представления совпадают с двоичным кодом. Различие между ними возникает только на этапе интерпретации весов двоичных разрядов. Например, одна и та же комбинация двоичных знаков 1001101 представляет число $45 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$ в классической двоичной системе счисления, число 19 = 13 + 3 + 2 + 1 в коде Цекендорфа-Фибоначчи (10) и число $A = \tau^6 + \tau^3 + \tau^2 + \tau^0$ – в системе счисления Бергмана (12). Заметим, что число A в последнем случае является иррациональным числом! А это означает, что в системе счисления Бергмана мы можем представлять некоторые иррациональные числа в виде конечной совокупности битов, что принципиально невозможно в классических позиционных системах счисления! В этом и состоит второй неожиданный результат, вытекающий из теории кодов золотой пропорции [3, 6].

Если теперь представить некоторое натуральное число N в системе счисления (10) и затем все степени τ^i заменить на соответствующие числа Фибоначчи F_i, расширенные в сторону отрицательных значений индексов i ($i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$), то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_i$ тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N. Это удивительное свойство натуральных чисел, названное Z-свойством (от слова “zero”), было открыто совсем недавно [8].

Таким образом, «коды Фибоначчи» и «коды золотой пропорции» и вытекающая из них компьютерная арифметика обладают «естественной» избыточностью, которая может быть использована для целей контроля разнообразных преобразований информации в компьютерах. Например, можно представить некоторую гипотетическую компьютерную сеть, в которой вся информация кодируется в виде натуральных чисел, представленныхв коде золотой пропорции. Но тогда рассмотренное выше Z-свойство и является тем «естественным» контрольным признаком, который позволяет контролировать – является ли полученная информация натуральным числом. Кроме того, эта избыточность проявляет себя в свойстве «множественности» представлений одного и того же числа. Например, число 19 в коде Фибоначчи имеет и другие кодовые представления:

$$19 = 1001101 = 1010001 = 1010010 = 0111101.$$

При этом различные кодовые представления одного и того же числа могут быть получены один из другого с помощью специальных «фибоначчиевых» операций *«свертки»* (011→100) и *«развертки»* (100→011), выполняемых над кодовым изображением числа. Если над кодовым изображением выполнить все возможные «свертки», то приходим к специальному «фибоначчиевому» изображению, называемому *«минимальной формой»*, в которой двух единиц рядом в кодовом изображении не встречается. Если же в кодовом изображении выполнить все возможные операции «развертки», то приходим к специальному «фибоначчиевому» изображению, называемому *«максимальной»* или «развернутой» формой, в которой двух нулей рядом не встречается.

Именно эти математические свойства кодов Фибоначчи и кодов золотой пропорции и стали побудительной причиной проектов создания компьютерных и измерительных систем на основе «фибоначчиевого» и «золотого» представлений [6-8, 11].

5. Основные этапы в развитии проекта «Компьютер Фибоначчи»

Арифметика Фибоначчи

Основы арифметики Фибоначчи были разработаны мною примерно в 1973 г. в Таганроге, то есть в период работы в качестве зав. кафедрой информационно-измерительной техники Таганрогского радиотехнического университета (1971-1977 гг.). История разработки «ариметики Фибоначчи» описана мною в биографической книге «Под знаком «Золотого Сечения»: исповедь сына студбатовца» [21]. Хотя начальные шаги в разработке арифметики Фибоначчи были сделаны лично мною, что получило отражение в виде статье «Избыточные позиционные системы счисления», опубликованной мною в 1974 г. в одном из научных сборников Таганрогского радиотехнического института [4], но дальнейшее развитие новой арифметики явилось результатом коллективного творчества. Мне удалось сформировать из наиболее талантливых студентов кафедры информационно-измерительной техники коллектив единомышленников, в состав которого входили аспиранты Юрий Вишняков, Владимир Лужецкий, Александр Фомичев, Николай Соляниченко. Первой диссертационной работой была кандидатская диссертация Юрия Вишнякова «Разработка принципов построения и исследование пересчетных устройств в p-кодах Фибоначчи», защищенная в 1977 г. на специализированном совете Таганрогского радиотехнического института.

Значительно позже я узнал, что одновременно с моими работами и работами моих учеников подобные исследования по «компьютерам Фибоначчи» проводились в США (Университет Мэриленд) под руководством доктора Ньюкомба (Newcomb). И в этом университете в 1979 г. была защищена докторская диссертация V.D. Hong “A Class of Arithmetic Burst-Error-Correcting Codes for the Fibonacci Computer”. Уже из названия диссертации следует, что цели исследований, проводившихся в Университете Мэриленд под руководством доктора Ньюкомба, и наших исследований в этой области, проводившихся в Таганрогском радиотехническом институте, были одинаковы – создание самоконтролирующихся и самокорректирующихся вычислительных и измерительных систем, основанных на использовании кодов Фибоначчи.

6. Перспективы развития «фибоначчиевого» направления в компьютерной науке

Новые результаты в фибоначчиевом направлении

В последние десятилетия автор значительную часть своего времени провел в африканских университетах (Университет Аль Фатех, Ливия, Триполи, 1995 – 1997 и Университет Эдуардо Мондлане, Мозамбик, Мапуту, 1998 – 2000). Именно в Африке автором получено ряд новых и оригинальных результатов в развитии «фибоначчиевой» информатики и математики: (1) разработана троичная зеркально-симметричная арифметика [8, 18, 19]; (2) развита теория матриц Фибоначчи и на этой основе разработана новая теория кодирования [8, 15 - 17]; (3) выдвинута концепция новой математики, «Математики Гармонии», основанной на «золотом сечении» [9, 10].

Троичная зеркально-симметричная арифметика

Для пояснения сути разработанного мною нового троичного способа представления чисел и новой троичной арифметики рассмотрим последовательность четных степеней золотой пропорции, то есть:

$$\tau^6, \tau^4, \tau^2, \tau^0, \tau^{-2}, \tau^{-4}, \tau^{-6}, \ldots,$$

где τ – «золотая пропорция».

Эту последовательность мы будем использовать в качестве весов разрядов для позиционного “троичного” представления чисел.

В теории золотого сечения доказано следующее интересное соотношение, связывающее члены рассматриваемой последовательности:

$$\tau^{2n} + \tau^{2n} = \tau^{2(n+1)} - \tau^{-2n} + \tau^{2(n-1)}. \qquad (5)$$

На языке “троичных” цифр указанное тождество имеет следующую кодовую интерпретацию:

$$1 + 1 = 1\bar{1}1. \qquad (6)$$

Выражение (16) задает правило сложения положительных единиц в новой системе счисления. Это правило гласит, что при сложении положительных единиц необходимо записать отрицательную единицу $\bar{1}$ в соответствующий разряд промежуточной суммы и сформировать симметрично относительно рассматриваемого разряда две положительные единицы, которые являются переносами в соседние (слева и справа) разряды.

Ясно, что не существует никаких проблем по аналогии записать правило сложения отрицательных единиц:

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{1}1\bar{1}. \qquad (17)$$

К указанным выше правилам добавим еще четыре правила, которые полностью совпадают с аналогичными правилами для классического “троичного” сложения:

$$0 + 0 = 0; \qquad 1 + 0 = 1; \qquad \bar{1} + 0 = \bar{1}; \quad \bar{1} + 1 = 0.$$

Теперь используем эти правила для “конструирования” изображений натуральных чисел в системе счисления, весами разрядов являются четные степени золотой пропорции.

Поскольку $1 = \tau^0$, то число 1 в новой системе счисления мы представим с помощью следующей записи:

1 = 1,0.

Заметим, что запятая, стоящая после 1, означает, что 1 относится к нулевому разряду.

Для получения записи числа 2 используем правило (16), в соответствии с которым число 2 можно представить в виде следующей записи:

$$2 = 1\bar{1},1.$$

Что означает эта запись? Она означает, что число 2 может быть выражено в виде суммы следующих четных степеней золотой пропорции:

$2 = \tau^2 - \tau^0 + \tau^{-2}$.

В этом легко убедиться, если вспомнить, что $\tau^2 = \tau + 1$, $\tau^{-2} = 1 - \tau^{-1}$, а $\tau^{-1} = \tau - 1$.

Добавляя положительную единицу к нулевому разряду кодовой записи числа 2, получим “троичную” запись числа 3:

$3 = 10,1$.

Эта запись означает ни что иное, как сокращенную цифровую запись следующее выражение:

$3 = \tau^2 + \tau^{-2}$.

Ясно, что число 4 имеет следующую цифровую запись:

$4 = 11,1$,

что выражает следующую сумму:

$4 = \tau^2 + \tau^{-0} + \tau^{-2}$.

Для получения цифровой записи числа 5 добавим 1 к нулевому разряду числа 4. В результате этого в соответствии с правилом (16) на первом шаге сложения в нулевом разряде промежуточной суммы записывается отрицательная единица $\bar{1}$, а из нулевого разряда формируются переносы двух положительных единиц в соседние разряды справа и слева от нулевого разряда. На следующем шаге сложения в соответствием с тем же правилом (16) в соседних разрядах справа и слева от нулевого записываются отрицательные единицы $\bar{1}$ и из них возникают переносы положительных единиц в соседние разряды. Поскольку при этом в нулевой разряд приходят два переноса положительных единиц (от разрядов справа и слева), то после их суммирования с отрицательной единицей, которую мы записали в нулевой разряд на первом этапе сложения, в нулевом разряде будет записана положительная единица ($\bar{1} + 1 + 1 = 1$). В конечном итоге мы получим следующее изображение числа 5:

$$5 = 1\bar{1}\,1,\bar{1}1.$$

Продолжая эти рассуждения, мы получим изображения всех натуральных чисел, в частности:

$6 = 1\,0\,\bar{1},0\,1$; $7 = 100,01$; $8 = 101,01$; $9 = 11\bar{1},11$; $10 = 110,11$ и т.д.

Ясно, что все эти цифровые изображения есть ни что иное, как сокращенные записи следующей суммы:

$$N = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \tau^{2i}, \tag{8}$$

где c_i – троичные цифры $\bar{1}$, 0, 1; τ^{2i} – вес i-го разряда позиционного представления (18).

Что же является основанием данной системы счисления? Из анализа выражения (18) вытекает, что основанием системы счисления (18) является иррациональное число

$$\tau^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}618. \quad (9)$$

Еще раз внимательно проанализируем “троичные” цифровые записи натуральных чисел 1, 2, 3, …, 10 в системе счисления (18). Мы видим, что цифровая запись числа нулевым разрядом разбивается на две части: левую и правую. При этом левая часть числа является зеркально-симметричным отображением правой части числа относительно нулевого разряда! Это неожиданное свойство цифровых изображений натуральных чисел я назвал свойством “зеркальной симметрии”, а саму систему счисления “зеркально-симметричной”. Заметим, что это свойство справедливо только для цифровых изображений натуральных чисел.

Оказалось, что это уникальное свойство является “инвариантом” относительно всех арифметических операций над числами, выполняемыми в зеркально-симметричной системе счисления. А это означает, что найден новый универсальный способ контроля всех арифметических операций в компьютере, который может быть построен на основе зеркально-симметричной системе счисления.

Создание “троичной зеркально-симметричной арифметики” [8, 18, 19], разработка которой была завершена мною в период работы на кафедре вычислительной техники Ливийского университета Аль-Фатех (1995-1997), я считаю своим высшим достижением в области теории систем счисления. Эта система счисления возникла как результат моих многолетних поисков более эффективных путей построения компьютеров. Новая система счисления основана на “троичном” представлении и сохраняет все основные преимущества классической “троичной” симметричной системы счисления, использованной Н.П. Брусенцовым при создании компьютера “Сетунь”. Но ее основным достоинством по сравнению с классической симметричной системой счисления является уникальный способ контроля всех основных преобразований информации в компьютере. Поэтому я считаю вопрос разработки “зеркально-симметричного Фибоначчи-компьютера” в развитие “троичных” компьютеров Брусенцова может оказаться делом не такого уж далекого будущего.

Цифровая обработка сигналов

Из последних приложений кодов Фибоначчи следует упомянуть такую важную область информатики как «цифровая обработка сигналов». В российской науке идеи использования чисел Фибоначчи для создания сверхбыстрых алгоритмов цифровой обработки активно развивает доктор физико-математических наук профессор Чернов Владимир Михайлович (Самара, Институт обработки изображений РАН). Благодаря его инициативе и были опубликованы статьи [17, 18]. Исследования по «фибоначчиевой» цифровой обработке проводятся в Финляндии (Tampere International Center for Signal Processing). В книге [28] широко используются так называемые обобщенные числа Фибоначчи (или p-числа Фибоначчи), введенные мною в начале 70-х годов. Сверхбыстрые «фибоначчиевые» преобразования могут быть реализованы только над числовыми данными, представленными в p-кодах Фибоначчи. Это означает, что для реализации таких преобразований требуется создание специализированных процессоров Фибоначчи! И упомянутый выше аналоговый микропроцессор фирмы Analog Devices, выполняющий операции в коде Фибоначчи, подтверждает перспективность создания «процессоров Фибоначчи» для цифровой обработки сигналов.

7. Матрицы Фибоначчи и новая теория кодирования

Q-матрица

В последние десятилетия теория чисел Фибоначчи дополнилась теорией матрицы специального типа, названной *Q-матрицей* [2]. Последняя представляет собой простейшую квадратную матрицу размером 2×2 следующего вида:

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Заметим, что детерминант Q-матрицы равен – 1.

Но какое отношение имеет Q-матрица к числам Фибоначчи? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно возвести Q-матрицу в n-ю степень. Тогда мы получим:

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}, \qquad (21)$$

где F_{n-1} , F_n , F_{n+1} числа Фибоначчи.

Если теперь вычислить детерминант матрицы (21), то мы неожиданно придем к следующему замечательному тождеству, связывающем соседние числа Фибоначчи:

$$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}. \qquad (22)$$

Эта удивительная формула является, пожалуй, одним из важнейших математических свойств чисел Фибоначчи. И она вызывает благоговейный трепет, если представить себе, что она справедлива для любого значения n (напомним, что целое n может принимать любое значение в пределах от $-\infty$ до $+\infty$). Но она вызывает также истинное эстетическое наслаждение, потому что чередование +1 и –1 в выражении (23) при последовательном прохождении всех чисел Фибоначчи от $-\infty$ до $+\infty$ вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии.

Обобщенные «фибоначчиевые» матрицы

Можно использовать идею «фибоначчиевой» Q-матрицы для получения обобщенных «фибоначчиевых» матриц, основанных на p-числах Фибоначчи (6), (7). Введем следующее определение для Q_p-матрицы:

$$Q_p=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad (23)$$

где индекс p принимает следующие значения: 0, 1, 2, 3, … .

Заметим, что Q_p-матрица представляет собой квадратную $(p+1)\times(p+1)$-матрицу. Она содержит единичную $(p\times p)$-матрицу, ограниченную последней строкой, состоящей из нулей, и первым столбцом, который состоит из нулей, ограниченных единицами. Для случаев p = 0, 1, 2, 3, 4 Q_p-матрицы имеют следующий вид соответственно:

$$Q_0 = (1)\,; \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q\,; \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для случая p=1 Q_p-матрица (23) сводится к классической Q-матрице (20). Все матрицы Q_p связаны друг с другом следующими удивительными соотношениями. Если в матрице Q_4 вычеркнуть последний столбец и предпоследнюю строку, то она вырождается в матрицу Q_3 . Вычеркнув теперь последний столбец и предпоследнюю строку в матрице Q_3 , мы получим матрицу Q_2 и т.д. Таким образом, каждая матрица Q_p, с одной стороны, содержит в себе все предыдущие матрицы и, с другой стороны, входит во все последующие матрицы. Эта удивительная регулярность в построении матриц Q_p вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии!

Для степеней матрицы Q_p в [16] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для заданного целого p (p = 1, 2, 3, …) и заданного целого n (n = 0, ±1, ±2, ±3, …) имеет место следующее выражение для n-й степени матрицы Q_p :

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix} \tag{24}$$

Теорема 2.

$$\mathrm{Det}\; Q_p^n = (-1)^{pn}, \tag{25}$$

где p = 0, 1, 2, 3, … ; n = 0, ±1, ±2, ±3, … .

И теперь мы можем выразить наше восхищение по поводу Теорем 1 и 2. Действительно, трудно вообразить, что p-числа Фибоначчи, задаваемые рекуррентной формулой (6), (7), могут стать основой нового и весьма необычного класса квадратных матриц, задаваемых выражениями (23) и (24). Но каждому, кто знаком с теорией матриц, результат (25) может показаться совершенно невероятным! Невозможно вообразить, чтобы для любых заданных p (p=0, 1, 2, 3, …) и n (n = 0, ±1, ±2, ±3, …) детерминант матрицы (24) всегда равен либо 1, либо (-1), что следует из (25)! Несомненно, что матрицы (23), (24) представляют большой интерес для современной теории матриц. Но ощущение «божественного характера» этих матриц, какой-то тайны, содержащихся в них, дает основание высказать предположение, что рассмотренные выше матрицы Фибоначчи могут стать источником глубоких размышлений и философских трактовок!

Новая теория кодирования

Одно из возможных приложений новых матриц Фибоначчи в современной информатике – их использование в теории кодирования [15]. Рассмотрим следующий способ кодирования-декодирования информации (см. таблицу). Как следует из таблицы, первый шаг кодирования состоит в представлении исходного сообщения в виде квадратной матрицы размером $(p+1)\times(p+1)$, где $p=1, 2, 3, ...$. Затем сформированная матрица M умножается на кодирующую матрицу Фибоначчи Q_p^n. Декодирование состоит в умножении кодовой матрицы E на декодирующую матрицу Фибоначчи Q_p^{-n}.

Кодирование	Декодирование
$M\times Q_p^n = E$	$E\times Q_p^{-n} = M$

Поскольку число кодирующих и декодирующих матриц Фибоначчи теоретически неограниченно ($p=0, 1, 2, 3, \ldots n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$), то можно говорить о некоторой новой теории кодировании, основанной на использовании матриц Фибоначчи.

Благодаря уникальным математическим свойствам матриц Фибоначчи, между элементами исходной матрицы M и кодовой матрицы E устанавливаются строгие математические соотношения, которые могут быть использованы для обнаружения и исправления ошибок. Одно из таких свойств непосредственно вытекает из Теоремы 2. Если вычислить детерминант кодовой матрицы E, то из способа ее образования вытекает следующее:

$$\mathrm{Det}\, E = \mathrm{Det}\,(M\times Q_p^n) = \mathrm{Det}\, M \times \mathrm{Det}\, Q_p^n = \mathrm{Det}\, M\times(-1)^{pn}$$

А это означает, что детерминант кодовой матрицы с точностью до знака совпадает с детерминантом исходной матрицы. Если теперь мы будем всегда вычислять детерминант Det M и использовать его в «канале связи» в качестве «контрольного сообщения», то это позволит нам весьма эффективно использовать это свойство для обнаружения и исправления ошибок [15]. Заметим, в отличие от классической теории кодирования, где объектами обнаружения и исправления являются «биты» и их совокупности, в предлагаемом способе кодирования объектами обнаружения и исправления являются элементы кодовой матрицы, которые могут быть целыми числами теоретически неограниченной длины!

8. Связь кода Фибоначчи с генетическим кодом

Как известно, генетический код строится на основе четырех азотистых оснований: A (аденин), C (цитозин), G (гуанин), T (тимин). С помощью совокупностей из трех азотистых оснований (триплетов) кодируются аминокислоты, а последовательность аминокислот и представляет собой генетический код. Возникает вопрос: существует ли какая-либо связь между генетическим кодом и кодом Фибоначчи? Для установления этих связей рассмотрим 6-разрядный код Фибоначчи, в котором весами разрядов являются числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8.

$$N = a_6\times8 + a_5\times5 + a_4\times3 + a_3\times2 + a_2\times1 + a_1\times1. \quad (26)$$

При этом обнаруживаются следующие неожиданные аналогии между шестиразрядным кодом Фибоначчи и триплетным генетическим кодированием наследственной информации:

(1) *Первая аналогия.* Шестиразрядный двоичный код Фибоначчи использует для представления чисел $2^6 = 64$ двоичных кодовых комбинаций от 000000 до 111111, что совпадает с числом триплетов генетического кода $4^3 = 64$.

(2) *Вторая аналогия.* С помощью 6-разрядного кода Фибоначчи можно закодировать 21 целое число, начиная с числа 0, которое изображается с помощью 6-разрядной двоичной комбинации: 00000, и заканчивая максимальным числом 20, которое изображается с помощью 6-разрядной кодовой комбинации 111111.

Заметим, что, используя триплетное кодирование, в генетическом коде также представляется 21 объект, включая 20 аминокислот и один дополнительный объект, стоп-кодон, несущий в себе информацию об окончании белкового синтеза.

(3) *Третья аналогия.* Как упоминалось, основной особенностью кода Фибоначчи (10) является *множественность* представления чисел. За исключением минимального числа 0 и максимального числа 20, которые имеют в коде Фибоначчи единственные представления (соответственно 000000 и 111111), все остальные числа от 1 до 19 имеют в коде Фибоначчи множественное представление, то есть используют не меньше двух кодовых представлений. Следует отметить, что в генетическом коде также используется свойство множественности представления, которое называется *«вырожденностью»* генетического кодирования.

Таким образом, между 6-разрядным кодом Фибоначчи и генетическим кодом, основанном на триплетном представлении аминокислот, существуют весьма интересные аналогии, которые среди остальных способов избыточного кодирования выделяют код Фибоначчи в особый способ кодирования, изучение которого может способствовать раскрытию особенностей генетического кодирования. Можно высказать предположение, что подобные аналогии могут стать весьма полезными при решении проблемы создания био-компьютеров, основанных на ДНК.

ЛИТЕРАТУРА

ОБЩИЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ЧИСЛАМ ФИБОНАЧЧИ:

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978.
2. Hoggat, Verner E. Fibonacci and Lucas Numbers, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California (1969).
3. Bergman G. "A number system with an irrational base". Mathematics Magazine, 1957, No.31.
4. Стахов А.П. «Избыточные двоичные позиционные системы счисления». В сборнике «Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры», Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974, Вып. 2.
5. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. – М.: Советское Радио, 1977 г.
6. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М.: Радио и Связь, 1984 г.
7. Брошюра «Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи». – М.: Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г. (сборник статей по разработкам Специального конструкторско-технологического бюро «Модуль»).
8. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations, Toronto, “SKILLSET-Training”, 1997.
9. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics // Applications of Fibonacci Numbers, V.7, 1998.
10. Stakhov A.P. Mathematics of Harmony and Harmony of Mathematics // Proceedings of Third Interdisciplinary Symmetry Congress, 1995.

ВАЖНЕЙШИЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ, ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ:

11. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения: новый подход к теории позиционных систем счисления и компьютерной арифметике. Журнал «Управляющие машины и системы», 1994, No 4-5.
12. Стахов А.П. Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Журнал «Доклады Академии Наук Украины», 1993, том 208, No 7.
13. Золотий переріз та наука про гармонію систем, Журнал “Вісник Академії Наук України”. 1991, No 12.
14. The Golden Section in the Measurement Theory // Computers & Mathematics with Applications, 1989, V.17, No 4-5.

15. Stakhov A.P., Sluchenkova A.A., Massingue V. Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography. – Харьков: Изд-во «Основа» Харьковского университета, 1999 г.
16. Stakhov A.P. A generalization of the Fibonacci Q-matrix. Доклады Академии наук Украины, No 9, 1999.
17. Stakhov A.P. “Matrix Arithmetic based on Fibonacci Matrices”. Сборник статей «Компьютерная оптика», вып. 21, Институт обработки изображений Российской Академии наук, 2001 г.
18. Stakhov A.P. “Ternary Mirror-Symmetrical Arithmetic and its Applications to Digital Signal Processing”. Сборник статей «Компьютерная оптика», вып. 21, Институт обработки изображений Российской Академии наук, 2001 г.
19. Stakhov, A.P. “Brousentsov’s Ternary Principle, Bergman’s Number System and Ternary Mirror-Symmetrical Arithmetic”. The Computer Journal (British Computer Society), Vol. 45, No. 2, 2002.
20. Stakhov, A.P., Sluchenkova, A.A. WEB site “Museum of Harmony and Golden Section”, 2001 (http://www.goldenmuseum.zibys.com/).
21. Стахов А.П. Под знаком «Золотого Сечения»: исповедь сына студбатовца. - Винница, Издательство “ITI”, 2003.
22. Стахов А.П. Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на золотом сечении, 2003 г. (рукопись).

ЗАРУБЕЖНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО КОДАМ И КОМПЬЮТЕРАМ ФИБОНАЧЧИ:

23. Newcomb, R.. “Fibonacci Numbers as a Computer Base”. Conference Proceedings of the Second Interamerican Conference on Systems and Informatics, Mexico City, November 1974.
24. Monteiro, P., Newcomb, R. “Minimal and maximal Fibonacci Representations: Boolean Generation”. The Fibonacci Quarterly, 1976, V.14, No. 1.
25. Ligomenides P., Newcomb, R. “Equivalence of some Binary, Ternary, and Quaternary Fibonacci Computers”. Proceeding of the Eleventh International Symposium on Muliple-Valued Logic, Norman, Oklahoma, May 1981.
26. Ligomenides P., Newcomb R. “Complement Representations in the Fibonacci Computer”, Proceedings of the Fifth Symposium on Computer Arithmetic, Ann Arbor, Michigan, May 1981.
27. Hoang, V.D. A Class of Arithmetic Burst-Error-Correcting Codes for the Fibonacci Computer. PhD Dissertation, University Maryland, December 1979.
28. Stankovic, R.S., Stankovic, M., Astola, J.T., Egizarian, K. Fibonacci Decision Diagram, Tampere International Center for Signal Processing, 2000.
29. Perez, Jean Claude. The DNA SUPRA-Code. Discovery, Proves and Evidence of the Hidden Language of DNA, 2000.

О.В. Кабанова, Д.А. Говаровский, В.В. Глушенко

Нижнетагильский технологический институт (филиал) Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уральского государственного технического университета»

ПРОЕКТИРОВАНИЕ WEB СЕРВЕРА

По разработке дизайна, структуры и технической поддержки для ВУЗ-а значительно отличаются от коммерческих проектов. Мы постараемся открыть особенности проектирования web сервера именно для высшего учебного заведения.

Стуктура